

**Ein Beitrag zur Entwicklung von Assistenzsystemen  
für serielle und parallele Roboter am Beispiel von  
Autobetonpumpen und seilbasierten Regalbediengeräten**

Von der Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Abteilung Maschinenbau der  
Universität Duisburg-Essen  
zur Erlangung des akademischen Grades

DOKTOR-INGENIEUR

genehmigte Dissertation

von

Wildan Lalo

aus  
Jakarta

Referent: Prof. Dr.-Ing. Dieter Schramm  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. Christoph Woernle  
Tag der mündlichen Prüfung: 23.05.2013



## Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während und kurz nach meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Mechatronik der Universität Duisburg-Essen und wurde unter anderem im Rahmen eines Kooperationsprojekts von der Firma SCHWING GmbH in Herne gefördert.

Zunächst möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Dieter Schramm ganz herzlich bedanken, der mir die Möglichkeit gab, die Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an seinem Lehrstuhl anzutreten und mit seiner entgegenkommenden Förderung diese Arbeit zu verfassen und fertig zu stellen. Mein besonderer Dank gilt ihm auch für die richtungsweisende Betreuung der Arbeit und die Übernahme des Hauptberichts.

Des Weiteren danke ich recht herzlich Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Christoph Woernle für sein Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Mitberichts.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Hiller möchte ich danken, da durch ihn während meines Maschinenbau-Studiums der erste Kontakt mit der Mechatronik und dem Lehrstuhl entstanden ist.

Bei Herrn Dipl.-Ing. Manfred Lenhart und den Mitarbeitern der Firma SCHWING-GmbH, insbesondere Herrn Reiner Vierkotten möchte ich mich recht herzlich für ihre wohlwollende Unterstützung bedanken.

Außerdem gilt mein Dank allen ehemaligen Kolleginnen und Kollegen des Lehrstuhls für Mechatronik. Die wertvollen fachlichen Gespräche, gemeinsamen Doktoranden-seminare und außerdienstlichen Aktivitäten haben mich sowohl fachlich als auch persönlich positiv geprägt und weiter gebracht. In diesem Zusammenhang möchte ich mich besonders bei Herrn Dipl.-Ing. Christian Sturm bedanken.

Allen Studenten, die im Rahmen von Studien- und Diplomarbeiten einen Beitrag zu dieser Arbeit geleistet haben, gilt ebenfalls mein Dank.

Schließlich möchte ich mich bei meiner ganzen Familie und meinen Freunden bedanken, die mich all die Jahre begleitet haben. Ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern für ihr Verständnis und ihre Unterstützung; sie sind stets da, wann immer ich sie brauche. Meiner Schwester danke ich für die gemeinsamen wertvollen und aufmunternden Gespräche und meiner Frau danke ich für ihre Geduld und ihren festen Rückhalt; sie hat wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Ohne euch hätte ich es nicht soweit geschafft und wäre diese Arbeit nicht zustande gekommen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Auflistung häufig verwendeter Symbole</b>	<b>VIII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Problemstellung . . . . .	1
1.2.1 Inverse Kinematik serieller, redundanter Manipulatoren . . . .	3
1.2.2 Kraftberechnung bei parallelen Seilrobotern . . . . .	6
1.3 Literaturübersicht . . . . .	8
1.3.1 Serielle, redundante Roboter . . . . .	8
1.3.2 Parallele, redundante Roboter . . . . .	10
1.4 Ziel und Inhalt der Arbeit . . . . .	11
<b>2 Grundlagen</b>	<b>13</b>
2.1 Dualität . . . . .	13
2.2 Redundanz . . . . .	14
2.3 Nichtlineare Optimierungsprobleme . . . . .	15
<b>3 Auflösung der mechanischen Redundanz</b>	<b>17</b>
3.1 Einleitendes Beispiel . . . . .	17
3.2 Konvexe quadratische Optimierungsprobleme . . . . .	23
3.3 Lösung von konvexen quadratischen Optimierungsproblemen . . . . .	24
3.4 Modifizierter Big- $M$ Ansatz . . . . .	30
<b>4 Anwendungsbeispiel 1: Serielle redundante Roboter</b>	<b>39</b>
4.1 Beispiele für serielle Großmanipulatoren . . . . .	39
4.2 Modellierung von seriellen Großmanipulatoren . . . . .	40
4.2.1 Grundlegende Definitionen . . . . .	40
4.2.2 Vorwärtskinematik . . . . .	46
4.2.3 Umlenkmechanismen der hydraulischen Antriebe . . . . .	50

4.2.4	Berücksichtigung der statischen Biegeelastizität . . . . .	62
4.3	Inverse Kinematik . . . . .	71
4.3.1	Einleitung . . . . .	71
4.3.2	Affines Manipulierbarkeitsmaß . . . . .	72
4.3.3	Lösungsansatz als quadratisches Optimierungsproblem . . . .	73
4.3.4	Robuste Inverse . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Anwendungsbeispiel 2: Seilgetriebenes Regalbediengerät</b>	<b>80</b>
5.1	EffizienzCluster Logistik-Ruhr . . . . .	80
5.2	Modellbildung des seilbasierten Regalbediengeräts . . . . .	81
5.2.1	Kinematische Klassifizierung . . . . .	82
5.2.2	Konzeptionelle Gestaltung . . . . .	84
5.2.3	Kinematik der Plattformbewegung . . . . .	87
5.2.4	Inverse Kinematik . . . . .	89
5.2.5	Vorwärtskinematik . . . . .	97
5.2.6	Bewegungsgleichungen der Plattform . . . . .	98
5.2.7	Modellbildung und Simulation der Seilelastizität . . . . .	103
5.3	Optimale Seilkraftverteilung . . . . .	107
5.4	Arbeitsraumberechnung . . . . .	108
5.4.1	Arbeitsraum des Regalbediengeräts . . . . .	110
5.4.2	Optimaler Arbeitsraum des Regalbediengeräts . . . . .	111
5.5	Optimale Bewegungstrajektorie . . . . .	115
5.5.1	Einfache Trajektoriengenerierung . . . . .	115
5.5.2	Inverse Dynamik . . . . .	119
5.5.3	Grundlagen der optimalen Steuerung . . . . .	123
5.5.4	Optimale Steuerung des seilbasierten Regalbediengeräts . . . .	130
5.5.5	Simulationsergebnisse . . . . .	135
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>141</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>143</b>

<b>Anhang</b>	<b>155</b>
---------------	------------

<b>A Der Mercatronics-Manipulator</b>	<b>155</b>
---------------------------------------	------------

<b>B Obere Abschätzung für die Anzahl der Ecken eines Polytops</b>	<b>157</b>
--	------------

<b>C Einfache, minimale Zeittrajektorie</b>	<b>160</b>
---	------------

## Auflistung häufig verwendeter Symbole

$\alpha$	Neigungswinkel des Drehschemels in der $xy$ -Ebene; Umschlingungswinkel des Seils auf der Umlenkrolle
$\alpha^k$	Schrittweiten-Parameter im Iterationsschritt $k$
$\beta$	Schwenkwinkel der schwenkbaren Umlenkrolle
$\gamma$	Fester Neigungswinkel der Umlenkrolle
$\gamma_i$	Gelenkwinkel von Mastarm $i$
$\lambda$	LAGRANGE-Multiplikatoren der Gleichungs-Nebenbedingungen
${}^B \mathbf{R}_P$	Rotationsmatrix vom Plattform- ins Basis-Koordinatensystem
${}^i \mathbf{a}_i$	Vektor von Gelenk $i$ nach Gelenk $i + 1$ dargestellt im körperfesten Koordinatensystem $\mathcal{K}_i$ , ${}^i \mathbf{a}_i = [a_{x,i}, a_{y,i}, a_{z,i}]^\top$
$\mathbf{A}^\top$	Strukturmatrix, $\mathbf{A}^\top \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$\mathbf{J}$	JACOBI-Matrix
$\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z$	Elementare Rotationsmatrizen
$\Theta_S$	Trägheitstensor bez. des Schwerpunkts der Plattform
$\mathcal{L}$	LAGRANGE-Funktion
$\mathcal{Z}$	Zielfunktion
$\mu$	LAGRANGE-Multiplikatoren der Ungleichungs-Nebenbedingungen
$\varphi_i$	Neigungswinkel von Mastarm $i$ bezüglich der Horizontalen
$\psi, \theta, \varphi$	Gier-, Nick- und Wankwinkel der Plattform
$\mathcal{B}$	Inertiales Basis-Koordinatensystem
$\mathcal{P}$	Körperfestes Plattform-Koordinatensystem
$\varrho$	Radius der Umlenkrolle
$\mathbb{A}, \mathbb{W}$	Aktive Menge, Arbeitsmenge
$\mathbb{G}, \mathbb{U}, \mathbb{I}$	Menge aller Gleichungen, Menge aller Ungleichungen, Menge der inaktiven Ungleichungen
$\theta_i$	Verdrehung des Mastgelenks $i$ um die $y$ -Achse
$\boldsymbol{\theta}$	Vektor der (konstanten) Gelenkwinkel-Verdrehungen um die $y$ -Achse (Hochachse) des Manipulators, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_n]^\top$
$\mathbf{f}$	Vektor der Seilkraftverteilung, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$
$\mathbf{f}_E, \boldsymbol{\tau}_E$	Eingeprägte Kräfte und Momente der Plattform
$\mathbf{q}$	Vektor der verallgemeinerten Koordinaten
$\mathbf{w}$	Vektor der eingeprägten Kräfte und Momente, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$
$\boldsymbol{\omega}_P$	Winkelgeschwindigkeit von $\mathcal{P}$
$\Phi$	Orientierung von $\mathcal{P}$
$\mathbf{r}_P$	Ortsvektor von $\mathcal{P}$



---

$B_i$	Seilaustrittspunkt $i$ an der Basis, $1 \leq i \leq n$
$f_i$	Seilkraft $i$ , $i = 1, \dots, n$
$f_{G_i}$	Freiheitsgrad des Gelenks $i$
$M$	Drehachse der Umlenkrolle
$m$	Anzahl der Plattform-Freiheitsgrade
$m_P$	Masse der Plattform
$n$	Anzahl der Seile; Anzahl der Mastarme
$n_B$	Anzahl der starren Körper (ohne Grundkörper)
$n_G$	Anzahl der Gelenke
$n_L$	Anzahl der geschlossenen kinematischen Schleifen
$P_i$	Seilanlenkpunkt auf der Plattform, $1 \leq i \leq n$
$S$	Schwerpunkt der Plattform
$s_i$	Zylinderlänge von Umlenkkinematik $i$
$s_p(t)$	Bahnkoordinate der Plattform und deren zeitliche Ableitungen Geschwindigkeit $v_p(t)$ , Beschleunigung $a_p(t)$ und Ruck $r_p(t)$
$T$	Tangentialer Berührungspunkt des Seils
$t$	Zeit
$t_0, t_f$	Anfangszeit, Endzeit
$u(t)$	Steuervariablen
$x(t)$	Zustandsvariablen



# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Der zunehmende Kostendruck in der Industrie zwingt die Unternehmen, jegliche Art von Prozessen, sei es beispielsweise der Herstellungsprozess eines Produkts oder ein logistischer Lagerverwaltungs-Prozess, effizient zu gestalten. Ein Potential zur Effizienzsteigerung bildet die Prozessautomatisierung. Dabei bezeichnet Automatisierung bzw. Automatisieren nach DIN IEC 60050-351, ehemals nach DIN V 19233, die „Ausrüstung einer Einrichtung, so dass sie ganz oder teilweise ohne Mitwirkung des Menschen bestimmungsgemäß arbeitet...“ (Deutsches Institut für Normung e. V. (DIN) 2006).

Grenzen der Automatisierung entstehen bei Arbeitsabläufen, die eine gewisse Flexibilität erfordern, wie beispielsweise bei einem Prozess in einer sich ständig ändernden Umgebung mit Personen oder anderen bewegten Hindernissen. In diesen Fällen ist eine Automatisierung schwierig zu realisieren und erfordert eine komplexe und teure Umwelterfassungs-Sensorik und Steuerungstechnik, um Kollisionen zu vermeiden und damit für die Sicherheit aller beteiligten Personen in unmittelbarer Nähe zu sorgen.

Ist ein Prozess vollautomatisiert aufgrund des hohen technischen Aufwands auch wirtschaftlich nicht realisierbar, bieten Assistenzsysteme zumindest die Möglichkeit, Arbeitsabläufe zu optimieren. Im Allgemeinen erleichtern Assistenzsysteme also dem Menschen seine Handlungen, geben ihm Komfort und Sicherheit und ermöglichen einen effizienteren Arbeitsablauf. Dabei wird dem Assistenzsystem, in der Regel also der Maschine, nicht die volle Verantwortung über den Prozessablauf übertragen. Stattdessen unterstützt es den Menschen bei seinen Arbeitsvorgängen. Dies trifft z.B. auf komplexe Entscheidungsprozesse mit Hilfe visueller Feedbacks ebenso zu wie auf die Handhabung schwerer Lasten mit einem Roboter.

## 1.2 Problemstellung

Ein Beispiel für die wirtschaftlich erfolgreiche Automatisierung sind automatische Kleinteilelager (AKL, engl. automated storage/retrieval system, ASRS) in einem logistischen Unternehmen. Von einem Übergabe- bzw. Entnahmeort der Ware, dem Kommissionierplatz, wird diese, häufig über eine Förderanlage, an ein Regalbediengerät und zurück befördert. Das Regalbediengerät (engl. rack feeder) übernimmt

dabei den eigentlichen Ein- und Auslagerungsprozess der Ware in ein bzw. von einem Regal. Ein Lagerverwaltungssystem (LVS, engl. warehouse management system, WMS) führt Buch sowohl über den Warenversand und -eingang als auch über den Lagerungsort der Waren in den einzelnen Regalfächern.

Das Regalbediengerät eines konventionellen AKL stellt mit dem automatischen Ein- und Auslagern der Ware einen effizienten Prozess dar. Jedoch stößt es wegen seiner konstruktiven Struktur – Waren bis 50 kg erfordern ein etwa 2 t schweres Regalbediengerät – an seine technischen Grenzen, wenn kürzere Spielzeiten beim Ein- und Auslagern erforderlich sind. Eine effektive Leistungssteigerung kann durch eine seilbasierte STEWART-GOUGH-Plattform erzielt werden (siehe Bruckmann u. a. 2012).

Die Bedienung von Autobetonpumpen stellt ein potentielltes Beispiel eines Assistenzsystems dar, siehe Abb. 1.1. Die über 60 m langen, zumeist redundant ausgelegten



Abbildung 1.1: Autobetonpumpe im Einsatz.

Großmanipulatoren fördern mit Hilfe einer Betonpumpe den Frischbeton (bevor er zu Festbeton wird) durch an den Auslegerarmen angebrachte Förderleitungen bis zum Endeffektor. Dort wird er schließlich durch einen am Endeffektor montierten Endschlauch ausgegossen, um das Gebäude zu betonieren. Während ein Teil der Arbeiter den Endschlauch führt – der Maschinist der Autobetonpumpe führt die Auslegerarme in der Regel nach – kümmern sich andere um das Ebenen des Betonbodens.

Ein vollautomatischer Prozess des Betonpumpens erweist sich hier als schwierig und erfordert eine aufwändige und robuste Umgebungssensorik, um potentielle Hindernisse, ob starr oder bewegt, wie Gebäudeteile, Stromleitungen, Ausleger anderer Maschinen und das Baustellenpersonal detektieren zu können<sup>1</sup>. Aus diesem Grunde erweist sich eine teilautomatische Umsetzung des Betonpumpens als sinnvoller, bei der der Maschinist beim (Nach-)Führen der Auslegerarme durch ein Assistenzsystem unterstützt wird, wie beispielsweise eine benutzerfreundliche, also intuitive Bedienung des Manipulators.

Das eingangs erwähnte, automatische Regalbediengerät, welches zur Effizienzsteigerung durch eine seilbasierte STEWART-GOUGH-Plattform (SGP) realisiert werden kann und die Autobetonpumpe als Teil eines Assistenzsystems erfordern für die Voll- und Teilautomatisierung zunächst unterschiedliche Herangehensweisen, da sie auf den ersten Blick schon aufgrund der mechanischen Struktur – die seilbasierte SGP als paralleles, redundantes Robotersystem und die Autobetonpumpe als serieller redundanter Manipulator – nichts gemeinsam haben.

Dabei zeigen gerade die Arbeiten von Gosselin und Lallemant (2001) und Kock (2001), dass zwischen seriellen und parallelen redundanten (und nicht-redundanten) Robotern eine Gemeinsamkeit, die so genannte Dualität herrscht. Grundlegende Fragestellungen aus beiden Systemen – inverse Kinematik bei den seriellen Manipulatoren und Kraftberechnung bei den parallelen Robotern –, die für eine Voll- und Teilautomatisierung, konkret also für modellbasierte Regelungskonzepte von Bedeutung sind, können mit einer gemeinsamen Methodik gelöst werden.

### 1.2.1 Inverse Kinematik serieller, redundanter Manipulatoren

Wie eingangs erwähnt, ist die inverse Kinematik serieller, nicht-redundanter und redundanter Manipulatoren eine grundlegende Fragestellung aus dem Bereich der Robotik und soll in diesem Abschnitt kurz erläutert werden<sup>2</sup>. Ausgangspunkt ist die Vorwärtskinematik der seriellen Manipulatoren. Diese ist von Interesse, da sich daraus unter Vorgabe der Gelenkkoordinaten – im Prinzip also den Antrieben des Manipulators – die Position und Orientierung des Endeffektors bzw. des Werkzeugs bestimmen lässt. Mathematisch handelt es sich bei der Vorwärtskinematik um eine

---

<sup>1</sup>Ansätze dazu finden sich beispielsweise in Komainda und Hiller (1999a, b); Schneider und Hiller (1995a, b)

<sup>2</sup>Kinematik ist ein Teilgebiet der Mechanik und beschreibt die Bewegung von Körpern ohne dabei die Ursache der Bewegung, also die Kräfte, zu berücksichtigen. Grundlagen zur Kinematik finden sich beispielsweise in Schramm u. a. (2010a).

im Allgemeinen nicht-lineare Abbildung aus dem Raum der Gelenkkoordinaten in den Raum der Endeffektor-Koordinaten gemäß

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad (1.1)$$

wobei  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  die vektorwertige, nicht-lineare Abbildung der Vorwärtskinematik ist und  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  und  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  die Vektoren der Endeffektor- bzw. Gelenkkoordinaten. Die skalaren Größen  $m$  und  $n$  sind dabei die Anzahl der Freiheitsgrade des Endeffektors bzw. der Gelenkkoordinaten mit  $m \leq n$ . Bekanntermaßen ist die Herleitung der Vorwärtskinematik, also der Abbildung  $\mathbf{f}$  für serielle Manipulatoren trivial, in dem Sinne, dass eine eindeutige Lösung existiert. Ein schematisches Aufstellen der Vorwärtskinematik lässt sich beispielsweise mit Hilfe der DENAVIT-HARTENBERG-Parameter realisieren (Spong u. a. 2006; Denavit und Hartenberg 1955).

Die inverse Kinematik lässt sich formal aus der Vorwärtskinematik gemäß

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}) \quad (1.2)$$

ableiten, wobei  $\mathbf{f}^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  die inverse Abbildung bzw. die Umkehrfunktion der Vorwärtskinematik darstellt. Bei Kenntnis der inversen Kinematik ist es also möglich, unter Vorgabe der Endeffektor-Koordinaten  $\mathbf{x}$  die Gelenkkoordinaten  $\mathbf{q}$  zu bestimmen. Im Allgemeinen ist die inverse Kinematik jedoch nicht einfach zu bestimmen, insbesondere bei redundanten Manipulatoren<sup>3</sup> mit  $m < n$ , deren inverse Kinematik unendlich viele Lösungen enthält. Theoretisch existieren bei Vorgabe eines bestimmten Vektors von Endeffektor-Koordinaten unendlich viele Möglichkeiten bei der Wahl entsprechender Gelenkkoordinaten-Vektoren. In Abb. 1.2 wird anhand eines einfachen Beispiels die Problematik dargestellt. Darin sind drei von unendlich vielen Lösungen der inversen Kinematik für eine bestimmte Endeffektor-Position eines ebenen, seriellen 3-Freiheitsgrade Manipulators abgebildet. Der Vektor der Gelenkkoordinaten lautet entsprechend  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^\top \in \mathbb{R}^3$ , der Vektor der Endeffektor-Koordinaten  $\mathbf{x} = [y, z]^\top \in \mathbb{R}^2$ .

Aus praktischer bzw. technischer Sicht lässt sich der Lösungsraum dadurch einschränken, dass sich die Gelenke aufgrund der mechanischen Endlagen nur in einem begrenzten Bereich bewegen können. Des Weiteren sind die Leistungen der Antriebe begrenzt, so dass limitierte Gelenkgeschwindigkeiten und -beschleunigungen berücksichtigt werden müssen. Eine Verletzung der eben erwähnten Restriktionen würde im besten Fall den Verschleiß der Komponenten fördern und im schlimmsten Fall den Manipulator zerstören.

---

<sup>3</sup>Der Begriff der Redundanz wird in Abschnitt 2.2 näher erläutert.

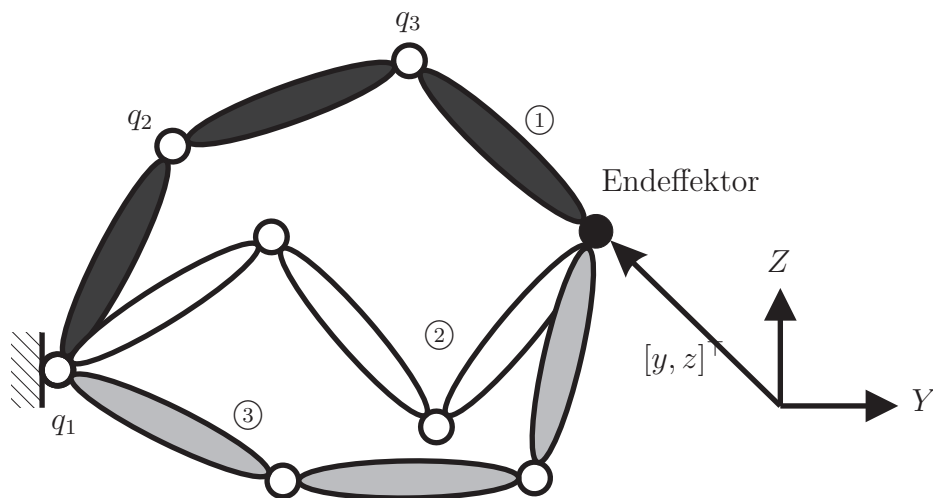


Abbildung 1.2: Drei von unendlich vielen Lösungen der inversen Kinematik für eine bestimmte Endeffektor-Position am Beispiel eines planaren, seriellen 3-Freiheitsgrade Manipulators mit  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T \in \mathbb{R}^3$  und  $\mathbf{x} = [y, z]^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $m = 2$ ,  $n = 3$ .

Es bleibt die Frage bestehen, welche der vielen Lösungen nun konkret gewählt werden soll. Ein Ansatz wird anhand des folgenden Beispiels in Abb. 1.3 erklärt. Die

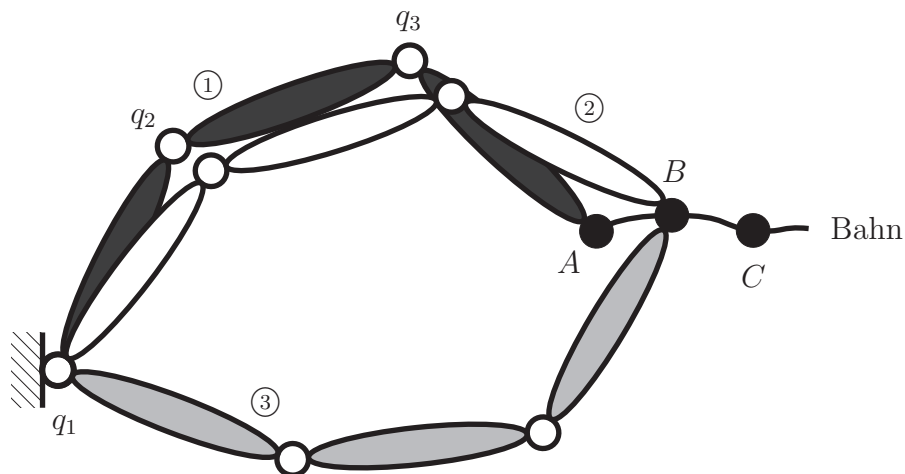


Abbildung 1.3: Inverse Kinematik für eine vordefinierte oder kommandierte Bahnbewegung.

typische Aufgabe des Manipulators besteht darin, den Endeffektor entlang einer vordefinierten oder kommandierten Bahn zu bewegen, die durch Bahnpunkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  usw. definiert ist. Sei nun Stellung ① die Ausgangskonfiguration, also die eindeutige Ist-Konfiguration des Manipulators (dunkel unterlegt), dessen Endeffektor in Punkt  $A$  liegt. Theoretisch ergeben sich bei der Berechnung der inversen Kinematik für den nächsten Bahnpunkt  $B$  unendlich viele Konfigurationen, von denen Stellung ② und



③ beispielhaft dargestellt sind (weiß und grau unterlegt). Unter Berücksichtigung, dass die Zeit zwischen  $A$  und  $B$  sehr kurz ist, wäre Stellung ③ im nächsten Moment nur dann realisierbar, wenn sich die Gelenke sehr schnell bewegen könnten, sprich sehr große Antriebsleistungen zur Verfügung stünden. Des Weiteren würde diese Bewegung viel Bewegungsenergie kosten. Sinnvoller wäre Stellung ②, bei der die Gelenke sich nur minimal bewegen müssen, um Endeffektor-Position  $B$  zu erreichen. Dieser Gedanke bildet nun die Basis für eine konkrete Lösung der inversen Kinematik und muss in eine entsprechende mathematische Form übertragen werden.

### 1.2.2 Kraftberechnung bei parallelen Seilrobotern

Parallele Roboter haben gegenüber den seriellen Robotern den Vorteil, dass der Endeffektor aufgrund der höheren Steifigkeit genauer positioniert und eine günstigere Lastverteilung erreicht werden kann. Die STEWART-GOUGH-Plattform ist ein klassisches Beispiel eines parallelen Roboters, hat jedoch den Nachteil, dass sie gegenüber einem seriellen Roboter mit gleichem Bauvolumen einen kleineren Arbeitsraum aufweist. Der Austausch der verwendeten Linearaktuatoren (in der Regel Hydraulikzylinder) durch Seile, die über Seilwinden ein- bzw. aufgewickelt werden, kompensiert diesen Nachteil, wodurch andere Eigenschaften zum Vorschein treten (Bruckmann u. a. 2013). Ein nicht zu vernachlässigender Punkt ist die unilaterale Eigenschaft des Seils, d. h. das Seil kann nur Zugkräfte aufnehmen. Da lose Seile im System vermieden werden müssen<sup>4</sup> und eine gewisse Verspannung im System herrschen sollte, müssen die Seile stets vorgespannt werden, mit Zugkräften größer als Null. Dieser Punkt weist darauf hin, dass eine rein kinematische Betrachtung des Systems nicht ausreicht, sondern dessen Kraft- und Momentenverhältnisse, sprich die Statik bzw. Dynamik des Seilroboters, berücksichtigt werden müssen. Aufgrund der unilateralen Seileigenschaft sind zudem mindestens  $n = m + 1$  Seile notwendig, wenn  $m$  die Endeffektor-Freiheitsgrade sind und  $n$  die Anzahl der Seile (Ming und Higuchi 1994).

Das folgende Beispiel zeigt einen ebenen Seilroboter mit punktförmiger Plattform und zwei Endeffektor-Freiheitsgraden, welcher von drei Seilen angetrieben wird ( $m = 2, n = 3$ ) und sich im Schwerfeld der Erde befindet, siehe Abb. 1.4, links. Es stellt sich nun die Frage, mit welchen Kräften  $F_1, F_2, F_3$  die drei Seile ziehen müssen, um den Massenpunkt in der dargestellten Position – unter Berücksichtigung der Schwerkraft – zu halten (Abb. 1.4, rechts). Dies lässt sich mit der Statik des Roboters aus dem Kräftegleichgewicht der Mechanik beschreiben und kann hier auch

---

<sup>4</sup>Sei das Eigengewicht des Seils vernachlässigbar, dann ist die Zugkraft des Seils in diesem Fall Null.



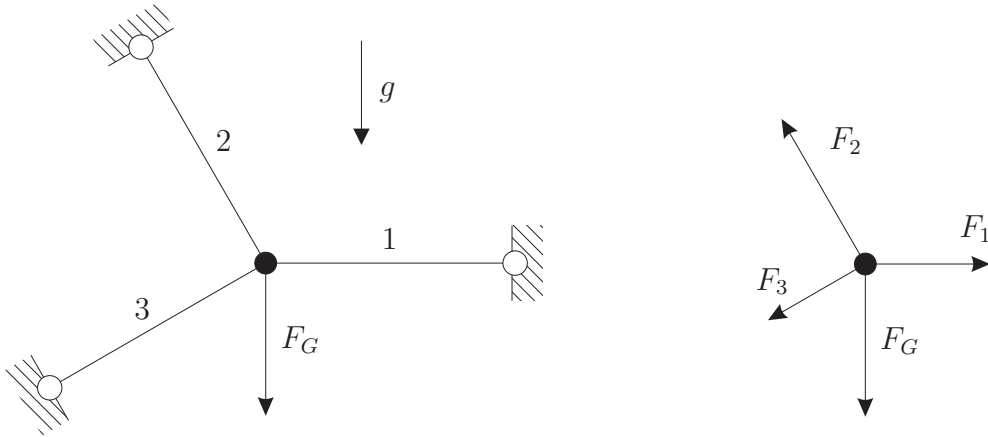


Abbildung 1.4: Links: Ebener, punktförmiger Seilroboter mit zwei Endeffektor-Freiheitsgraden und drei masselosen Seilen ( $m = 2, n = 3$ ) im Schwerfeld der Erde mit  $F_G$  der Gewichtskraft des Massenpunkts. Rechts: Freischnitt des Massenpunkts.

geometrisch bzw. graphisch mit Hilfe des Kräftepolygons ermittelt werden. Das Kräftegleichgewicht entspricht dabei einem geschlossenen Polygonzug. Aufgrund der punktförmigen Plattform fällt in diesem Beispiel das Momentengleichgewicht aus.

Anhand von Abb. 1.5 ist erkennbar, dass theoretisch unendlich viele geschlossene

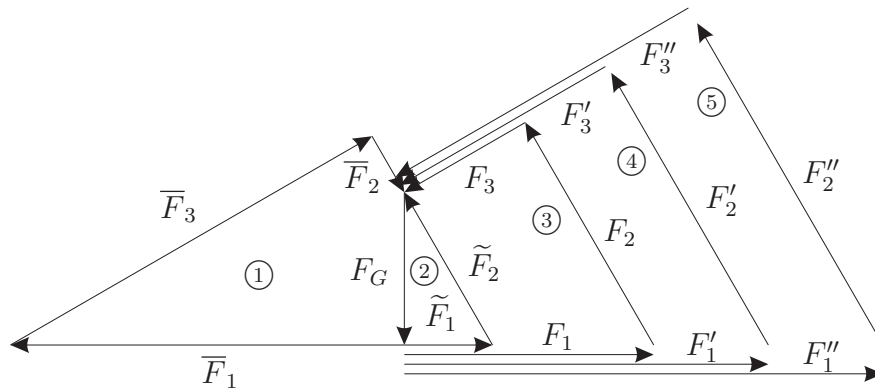


Abbildung 1.5: Kräfte-Polygone der Statik des ebenen, punktförmigen Seilroboters.

Polygonzüge, sprich unendlich viele Seilkraftverteilungen existieren, wovon einige dargestellt sind: die Polygonzüge

- ①  $F_G \rightarrow \bar{F}_1 \rightarrow \bar{F}_3 \rightarrow \bar{F}_2$ ,
- ②  $F_G \rightarrow \tilde{F}_1 \rightarrow \tilde{F}_2, \tilde{F}_3 = 0$ ,
- ③  $F_G \rightarrow F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3$ ,

- ④  $F_G \rightarrow F'_1 \rightarrow F'_2 \rightarrow F'_3$  und
- ⑤  $F_G \rightarrow F''_1 \rightarrow F''_2 \rightarrow F''_3$ .

Ausgehend von der Gewichtskraft  $F_G$  ist Ihnen allen gemeinsam, dass die Wirkungslinien der entsprechenden Seilkräfte stets parallel, jedoch deren Länge, also die Kraftbeträge voneinander verschieden sind. Aufgrund der unilateralen Seileigenschaft und unter der Berücksichtigung dass (positive) Zugkräfte gemäß Abb. 1.4, rechts definiert sind, ist Polygonzug ① ungültig, da sowohl  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$  und  $\bar{F}_3$  negative Kraftbeträge haben. Polygonzug ② wäre ein Grenzfall, da zwar  $\tilde{F}_1$  und  $\tilde{F}_2$  positiv sind, jedoch  $\tilde{F}_3 = 0$ , und somit aus praktikabler Sicht nicht empfehlenswert ist. Letztendlich sind die Polygonzüge ③, ④ und ⑤ gültige Kandidaten und alle anderen nicht eingezeichneten mit positiven Kraftbeträgen. Bleibt zum Schluss die Frage, welche als sinnvolle Lösung – sei es beispielsweise in Bezug auf die innere Verspannung des Roboters oder Energieaufwand<sup>5</sup> – in Frage kommt. Des Weiteren wird ersichtlich, dass bei Seilrobotern mit größerer Anzahl an Endeffektor-Freiheitsgraden und mehr Seilenantrieben eine graphische Lösung, wie sie oben für das einfache Beispiel eingeführt wird, nicht mehr möglich ist.

### 1.3 Literaturübersicht

Der folgende Abschnitt gibt eine Übersicht über die Literatur serieller und paralleler redundanter Roboter wider, wobei ein Augenmerk auf den aktuellen Forschungsstand zur Lösung der inversen Kinematik serieller, redundanter Roboter einerseits und Berechnung der Seilkraftverteilung seilbasierter STEWART-GOUGH-Plattformen andererseits gerichtet wird.

#### 1.3.1 Serielle, redundante Roboter

Der Sonderforschungsbereich 291 „Elastische Handhabungssysteme für schwere Lasten in komplexen Operationsbereichen“ befasste sich in einem Zeitraum von sieben Jahren (1996 bis 2003) mit der Erforschung von Großmanipulatoren, wie beispielsweise Autobetonpumpen und mobilen Hubarbeitsbühnen mit großen Reichweiten. In der Folge sind zahlreiche Arbeiten erschienen, die sich mit der Modellbildung, Simulation, Bahnplanung, Regelung und Konstruktion dieser mechatronischen Systeme befassen. Im Rahmen dieses Forschungsbereichs werden in Komainda (2003) und

<sup>5</sup>Hohe Seilkraftniveaus erfordern hohen Energieverbrauch!

Schneider (1999) unter anderem Methoden zur Lösung der inversen Kinematik vorgestellt durch Linearisierung der hochgradig nichtlinearen Vorwärtskinematik des Endeffektors und Invertierung der JACOBI-Matrix. Technische Endanschläge und maximale Geschwindigkeiten der Gelenke werden gemäß des Ansatzes von Khatib (1985) durch Einführung künstlicher Potential- und dissipativer Kräfte eingehalten.

Schlemmer (2000) löst die kinematische Redundanz mit einer SQP-Rückwärtskinematik (engl. sequential quadratic programming). Er formuliert das Problem als ein nichtlineares Programm mit quadratischer Zielfunktion unter Berücksichtigung der nichtlinearen Gleichungs-Nebenbedingungen der Vorwärtskinematik. Des Weiteren werden gerätetechnische Beschränkungen wie beispielsweise Gelenkendlagen und maximale Geschwindigkeiten in Form von einfachen linearen Ungleichungen berücksichtigt. Unter der Voraussetzung, dass die zu optimierenden, nichtlinearen Gütekriterien zweimal stetig differenzierbar sind, besteht die Strategie der SQP-Methode darin, sukzessiv beschränkte quadratische Teilprobleme zu lösen. Eine Besonderheit der SQP-Rückwärtskinematik ist die Einführung der sogenannten *affinen Manipulierbarkeit*. Diese zu maximierende Größe gibt an, in welchem Maße eine kommandierte Endeffektor-Bewegung unter Berücksichtigung der technischen Beschränkungen realisiert werden kann. Dieses Maß findet sich auch in Abdel-Rahman (1991), wobei er es als zu maximierenden Betrag der Endeffektor-Geschwindigkeit interpretiert. Darin formuliert er die inverse Kinematik sowohl als ein lineares als auch quadratisches Optimierungsproblem. Der Ansatz, die inverse Kinematik als ein quadratisches Programm zu formulieren, findet sich unter anderem auch in Cheng u. a. (1992, 1993, 1994).

In Schreiber (2004) wird das inverse Problem durch sukzessives Lösen von „linear least squares“-Teilproblemen (dt. Methode der kleinsten Quadrate) bestimmt. Dabei besteht jedes einzelne Teilproblem aus den linearisierten Gleichungs-Nebenbedingungen der Vorwärtskinematik und linearen Ungleichungen der gerätetechnischen Beschränkungen (siehe dazu Schlemmer 2000). Minimiert werden sowohl die EUKLIDISCHE Norm (2-Norm) des Gelenkwinkelversatzes als auch die des Fehlers zwischen der linearisierten Vorwärtskinematik und der geforderten Endeffektor-Pose. Durch das sukzessive Lösen der linearen Teilprobleme kann die exakte nichtlineare Lösung beliebig genau approximiert werden.

Im Gegensatz zu Schreiber (2004) minimieren Ho u. a. (2005) die Betragssummen-norm (1-Norm) des Gelenkwinkelversatzes und erhalten damit die Formulierung der inversen Kinematik als lineares Programm (LPIK, linear programming inverse kinematics). Allerdings wird hier das lineare Programm nicht als Teilproblem eines

sukzessiven Lösungsansatzes angewendet, um – wie bei Schreiber (2004) – den durch die linearisierte Vorwärtskinematik entstehenden Fehler zu kompensieren.

Alternativ stellen Chiacchio und Siciliano (1989) ein iteratives Verfahren vor, mit dem die inverse Kinematik mit Hilfe der transponierten JACOBI-Matrix gelöst wird anstatt mit deren (Pseudo-)Inverse. Der rechnerische Aufwand einer Iteration ist hierbei gering, da lediglich die JACOBI-Matrix transponiert werden muss. Des Weiteren existieren bei diesem Verfahren keine singulären Konfigurationen. Der Nachteil dieses Verfahrens liegt in den schlechteren Konvergenzeigenschaften gegenüber den Verfahren mittels Pseudoinversen der JACOBI-Matrix. Das u. a. (1988) schlagen daher ein hybrides Verfahren vor, welches die Vorteile sowohl der JACOBI-Transponierten als auch ihrer Pseudoinversen kombiniert.

Ein interessanter Ansatz liefert die Lösung der inversen Kinematik mit dem CCD-Algorithmus (engl. Cyclic-Coordinate descent algorithm), siehe z. B. Wang und Chen (1991); Welman (1993). Dabei handelt es sich um ein iteratives Verfahren, bei dem mit Hilfe von JACOBI- bzw. GAUSS-SEIDEL-Iterationen die gewünschte Endeffektor-Position angenähert wird. Ein Vorteil dieses Iterations-Verfahrens ist die Robustheit gegen singuläre Konfigurationen. Allerdings kann die Lösung zu sprunghaften Bewegungen führen (Baxter 2000).

### 1.3.2 Parallele, redundante Roboter

Borgstrom u. a. (2009) formulieren das Problem der optimalen Seilkraftverteilung als lineares Programm. Die Lösung des linearen Optimierungsproblems wird mit der Active-Set-Methode ermittelt. Eine gültige Startlösung wird durch die Einführung einer Schlupfvariablen bestimmt, womit das Problem in einer Phase gelöst werden kann<sup>6</sup>. Borgstrom u. a. (2009) zeigen auch, dass aufgrund des linearen Programmansatzes keine glatten und kontinuierlichen Lösungstrajektorien im Raum der verallgemeinerten Gelenkkoordinaten möglich sind, diese Unstetigkeiten allerdings bei ihren Ergebnissen nicht auftreten.

Die „optimale“ Seilkraftverteilung in Mikelsons u. a. (2008) liegt im Schwerpunkt des konvexen Polyeders aller gültigen Seilkraftverteilungen und ist somit eine „sichere“ Lösung, da sie weit vom Rand des gültigen Bereichs entfernt ist. Dabei zeigen Mikelsons u. a. (2008), dass diese Punkte kontinuierliche Lösungstrajektorien liefern. Allerdings setzt diese Methode die Kenntnis aller Eckpunkte des konvexen Polyeders

---

<sup>6</sup>Vergleiche die Initialisierungsmethode zur Suche einer gültigen Startlösung beim Medium-Scale Active-Set Algorithmus in `quadprog` aus der OPTIMIZATION TOOLBOX™ von MATLAB™ (The Mathworks a).

voraus (siehe Bruckmann 2010). Die Berechnung aller Eckpunkte nimmt dabei mit zunehmender Anzahl der Redundanz exponentiell (Nocedal und Wright 2006) zu.

Im Beitrag von Nahon und Angeles (1992) wird die Kraftberechnung mit einem quadratischen Programmierungsansatz gelöst, wobei der duale Active-Set Algorithmus von GOLDFARB-IDNANI (siehe auch Goldfarb und Idnani 1983; Boland 1996; Powell 1985) zum Einsatz kommt und durch eine „in-house“ Implementierung Echtzeitfähigkeit besitzt.

## 1.4 Ziel und Inhalt der Arbeit

Ziel des vorliegenden Beitrags ist die Entwicklung eines neuen Algorithmus, der, basierend auf der Big- $M$ -Methode von Nocedal und Wright (2006) für konvexe quadratische Programme, die im vorigen Abschnitt erwähnte inverse Kinematik und Seilkraftverteilung für Echtzeit-Anwendungen effizient berechnet. Dieser weiterentwickelte Algorithmus kompensiert dabei nachteilige Effekte, wie die numerische Instabilität des Verfahrens aufgrund des sehr großen Big- $M$ -Wertes. Die Herleitung des Algorithmus wird in Kapitel 3 eingehend behandelt.

Grundlage für die gemeinsame Methodik, die inverse Kinematik und Seilkraftverteilung mit dem selben Algorithmus zu lösen, liefert der duale Zusammenhang zwischen seriellen und parallelen Robotern. Aus diesem Grund wird vorab in Kapitel 2 der Dualitätsbegriff erläutert. Daneben werden die Definition der Redundanz und die Grundlagen der nichtlinearen Programmierung vorgestellt, die beide für das Verständnis des dritten Kapitels dienen.

In Kapitel 4 wird der Algorithmus auf die inverse Kinematik eines redundanten Großmanipulators angewendet, nachdem die Modellbildung und Simulation des Manipulators erfolgt ist. In diesem Kapitel werden auch spezielle Problemstellungen, wie die Lösung der typisch für Autobetonpumpen eingesetzten Umlenkmechanismen und ein Konzept zur einfachen, jedoch echtzeitfähigen Kompensation der Armelastizitäten präsentiert.

Im darauf folgenden Kapitel 5 wird ein Regalbediengerät auf Basis der STEWART-GOUGH-Plattform vorgestellt. Angefangen mit der Modellbildung seilbasierter Parallelroboter wird daraufhin der Algorithmus auf ein parametrisiertes Regalbediengerät angewendet. Die Seilkraftberechnung bildet dann die Grundlage für eine Offline-Arbeitsraumberechnung und ermöglicht die Abschätzung und Auslegung der erforderlichen Motor-Antriebsleistungen des Roboters. Darauf zielt die abschließende

optimale Steuerungsstrategie auf eine Erzeugung optimaler Bahnen und Trajektorien für den Spezialfall des vorliegenden Regalbediengeräts.

Das abschließende Kapitel 6 diskutiert die wesentlichen Aspekte dieses Beitrags und fasst die Ergebnisse zusammen.

## 2 Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die Begriffe Dualität und Redundanz in einem kurzen Überblick erläutert, da in Kock (2001) sowohl der Dualitätsbegriff als auch die Redundanz bezogen auf serielle und parallele Roboterkinematiken eingehend erläutert wird. Beide Begriffe sowie die im Anschluss daran vorgestellten Grundlagen der nichtlinearen Optimierung bilden die Rahmenbedingungen zum Verständnis der darauf folgenden Kapitel.

### 2.1 Dualität

Der Dualitätsbegriff wird in diesem Abschnitt im Zusammenhang mit seriellen und parallelen Robotern verwendet<sup>1</sup>. Eingehende Erläuterungen zum Dualitätsbegriff liefern neben Kock (2001) auch Gosselin und Lallemant (2001).

Bekanntlich lässt sich die Vorwärtskinematik des Endeffektors von seriellen Manipulatoren auf Geschwindigkeitsebene folgendermaßen formulieren (z. B. Schneider 1999; Komainda 2003; Kock 2001):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad m \geq n, \quad (2.1)$$

wobei  $\dot{\mathbf{x}}$  und  $\dot{\mathbf{q}}$  die Geschwindigkeitsvektoren der Endeffektor- bzw. Gelenkkoordinaten entsprechender Dimension sind und  $\mathbf{J}$  die JACOBI-Matrix des Endeffektors. Die inverse Statik liefert gemäß Komainda (2003)

$$\mathbf{f} = -\mathbf{J}^\top \mathbf{w}, \quad (2.2)$$

mit den verallgemeinerten Gelenkkräften  $\mathbf{f}$  und den externen Kräften und Momenten  $\mathbf{w}$  entsprechender Dimension.

Im Gegensatz dazu lautet die Statik paralleler Roboter, hier speziell die Statik eines seilgetriebenen Roboters

$$\mathbf{w} = -\mathbf{A}^\top \mathbf{f}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m \geq n, \quad (2.3)$$

mit der Strukturmatrix  $\mathbf{A}$  und den Seilkräften  $\mathbf{f}$ . Dagegen gilt für die inverse Kinematik des parallelen Seilroboters auf Geschwindigkeitsebene gemäß Kock (2001)

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>Dualität gibt es auch im Zusammenhang mit Optimierungsaufgaben, welche jedoch später im Abschnitt 3.3 über quadratische Programme erläutert wird.

wobei  $\dot{\mathbf{l}}$  der Vektor der Längenänderung der einzelnen Seile ist.

Laut Kock (2001) lässt sich der duale Zusammenhang zwischen seriellen und parallelen Kinematiken gemäß Abb. 2.1 darstellen. Daraus lässt sich ableiten, dass Me-

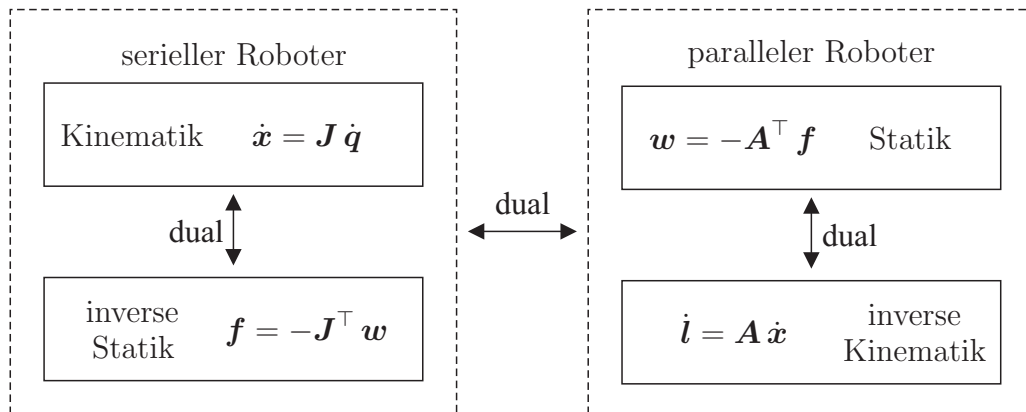


Abbildung 2.1: Duale Zusammenhänge nach Kock (2001).

thoden für serielle Roboter auf parallele Roboter übertragen werden können und umgekehrt.

## 2.2 Redundanz

Die Definition von Redundanz findet sich auch in Conkur und Buckingham (1997) sowie Merlet (2006). Danach unterscheidet man drei Arten der Redundanz (vgl. auch Kock 2001, Kap. 2.5):

- **Sensorredundanz:** Ein Roboter ist sensorredundant, wenn er mit mehr Sensoren ausgestattet wird als erforderlich, um ihn zu steuern und seine Kinematik zu lösen.
- **Aufgabenredundanz:** Hat ein Roboter mehr kartesische Endeffektor-Freiheitsgrade als erforderlich, um eine ihm vorgegebene Aufgabe zu erfüllen, ist er aufgabenredundant ausgelegt.
- **Mechanische Redundanz:** Sie lässt sich unterteilen in kinematische Redundanz und Antriebsredundanz, bei der einem Roboter mehr Antriebe zur Verfügung gestellt werden als sein Endeffektor an Bewegungsfreiheitsgraden hat.
  - **Kinematische Redundanz:** Die zusätzlichen Antriebe ermöglichen innere Bewegungsfreiheitsgrade, ohne die Zahl der Endeffektor-Freiheitsgrade zu



erhöhen. Der Roboter ist kinematisch unbestimmt. Vergleiche dazu die Beispiele in Abb. 1.2 und Abb. 1.3 aus Abschnitt 1.2.1.

- **Antriebsredundanz:** Die zusätzlichen Antriebe ermöglichen innere Verspannungen ohne die Zahl der Endeffektor-Freiheitsgrade zu erhöhen. Der Roboter ist statisch/dynamisch unbestimmt. Vergleiche dazu das Beispiel aus Abschnitt 1.2.2 und den Bildern in Abb. 1.4 und Abb. 1.5.

Nach Kock (2001) lässt sich der duale Zusammenhang und damit auch Abb. 2.1 für mechanisch redundante Manipulatoren erweitern.

## 2.3 Nichtlineare Optimierungsprobleme

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen nichtlinearer Optimierungsprobleme vorgestellt. Gegeben sei ein nichtlineares Optimierungsproblem der Form

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

$$\text{u. d. N.}^2 \quad g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i \in \mathbb{G}, \quad (2.6)$$

$$h_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i \in \mathbb{U}, \quad (2.7)$$

mit

$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  stetige, reellwertige Zielfunktion,

$\mathbb{G}$  endliche Indexmenge von Gleichungs-Nebenbedingungen,

$\mathbb{U}$  endliche Indexmenge von Ungleichungs-Nebenbedingungen,

$g_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  Gleichungs-Nebenbedingung für  $i \in \mathbb{G}$ ,

$h_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  Ungleichungs-Nebenbedingung für  $i \in \mathbb{U}$ ,

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  Vektor der zu optimierenden Variablen.

Die LAGRANGE-Funktion ist definiert als

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i \in \mathbb{G}} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) - \sum_{i \in \mathbb{U}} \mu_i h_i(\mathbf{x}) \quad (2.8)$$

mit den LAGRANGE-Multiplikatoren  $\lambda_i$  bezüglich der Gleichungs- und  $\mu_i$  bezüglich der Ungleichungs-Nebenbedingungen.

Eine Ungleichung  $h_i(\mathbf{x}) \geq 0, i \in \mathbb{U}$  ist *aktiv*, wenn  $h_i(\mathbf{x}) = 0$  gilt und *inaktiv*, wenn  $h_i(\mathbf{x}) > 0$  ist. Damit lässt sich die aktive Indexmenge, oder im Folgenden auch

---

<sup>2</sup>im Folgenden die Abkürzung für *unter den Nebenbedingungen*

kurz aktive Menge  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ , bzw. *Active-Set*, definieren als die Vereinigungsmenge aller Indizes der Gleichungs-Nebenbedingungen (da sie stets aktiv sind) und Indizes aller *aktiven* Ungleichungs-Nebenbedingungen:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{G} \cup \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad (2.9)$$

wobei

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \{i \in \mathbf{U} | h_i(\mathbf{x}) = 0\} \quad (2.10)$$

aus der aktiven Menge aller Indizes der Ungleichungs-Nebenbedingungen besteht. Da Gleichungs-Nebenbedingungen stets aktiv sind, soll im Folgenden auch die aktive Menge der Ungleichungen  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  als aktive Menge bezeichnet werden.

Für ein lokales Optimum im Punkt  $\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}^{*\top}, \boldsymbol{\lambda}^{*\top}, \boldsymbol{\mu}^{*\top}]^\top$  des obigen Optimierungsproblems gelten die folgenden *notwendigen*, sogenannten KARUSH-KUHN-TUCKER-Bedingungen, oder kurz KKT-Bedingungen:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{0} \quad (2.11a)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \lambda_i} \right|_{\hat{\mathbf{x}}} = g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \forall i \in \mathbf{G} \quad (2.11b)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i} \right|_{\hat{\mathbf{x}}} = h_i(\mathbf{x}^*) \geq 0, \quad \forall i \in \mathbf{U} \quad (2.11c)$$

$$\lambda_i^* \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in \mathbf{G} \quad (2.11d)$$

$$\mu_i^* \geq 0, \quad \forall i \in \mathbf{U} \quad (2.11e)$$

$$\lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \forall i \in \mathbf{G} \quad (2.11f)$$

$$\mu_i^* h_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \forall i \in \mathbf{U}. \quad (2.11g)$$

Die beiden letzten Ausdrücke sind die sogenannten Komplementär-Bedingungen. Besonders aus der letzten Komplementär-Bedingung für Ungleichungen (2.11g) wird ersichtlich, dass der LAGRANGE-Multiplikator  $\mu_i^*$  einer inaktiven Ungleichung mit  $h_i(\mathbf{x}^*) > 0$  zwangsläufig Null sein muss, d. h.

$$\mu_i^* = 0, \quad \forall i \in \mathbf{U} \setminus \mathbf{A}(\mathbf{x}^*). \quad (2.12)$$

Damit lässt sich die erste Gleichung der KKT-Bedingungen auch ausdrücken als

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} - \sum_{i \in \mathbf{G}} \lambda_i^* \left. \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} - \sum_{i \in \mathbf{A}} \mu_i^* \left. \frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

Eine umfassende Herleitung der KKT-Bedingungen mitsamt Beweisen findet sich u. a. in Nocedal und Wright (1999); Luenberger und Ye (2008); Peressini u. a. (1988).

### 3 Auflösung der mechanischen Redundanz

Die Auflösung der mechanischen, also kinematischen und Antriebsredundanz kann im Allgemeinen mit der verallgemeinerten Inversen oder PENROSE-MOORE-Pseudoinversen gelöst werden. Diese lässt sich mit Hilfe eines quadratischen Programms ohne Ungleichungs-Nebenbedingungen herleiten (siehe z. B. Kock 2001; Schneider 1999; Nocedal und Wright 2006). Die Verwendung der Pseudoinversen liefert also *eine* Lösung aus dem Raum der Redundanz, die einfach zu berechnen ist.

Technische Einschränkungen des Roboters wie beispielsweise Gelenkendanschläge oder, im Fall des Seilroboters, positive Seilkräfte<sup>1</sup> jedoch reduzieren den Raum auf einen Bereich, ohne die Dimension der Redundanz zu verändern. Im Allgemeinen wird die Lösung aus der Pseudoinversen außerhalb des gültigen Bereichs sein, d. h. die technischen Einschränkungen verletzen und damit den Roboter im schlimmsten Fall beschädigen. Aus diesem Grund ist die Einhaltung der technischen Begrenzungen besonders wichtig, so dass diese, in Form von einfachen linearen Ungleichungen, bei der Berechnung einer Lösung berücksichtigt werden müssen. Dies führt letztendlich auf quadratische Optimierungsprobleme unter Berücksichtigung von Ungleichungen, die nun – auf Basis der im vorigen Abschnitt vorgestellten nichtlinearen Optimierung – erläutert werden.

#### 3.1 Einleitendes Beispiel anhand eines einfachen, parallelen Seilroboters

Wie in der Einleitung in Abschnitt 1.2.2 zur Problematik der Seilkraftberechnung von Seilrobotern bereits erwähnt wurde, müssen die Seilkräfte aufgrund unilateraler Seileigenschaften stets positiv sein. Unter Umständen muss eine Mindestverspannung im System herrschen, d. h. minimal zulässige, positive Seilkräfte sind zu berücksichtigen. Andererseits dürfen die Seilkräfte nicht zu groß sein, weil sonst die zulässigen Seilbruchlasten, also maximale Seilkräfte – unter Berücksichtigung eines skalaren Sicherheitsfaktors – überschritten werden. Im gültigen Bereich der minimalen und maximalen Seilkräfte können dann unter Berücksichtigung der Statik bzw. Dynamik des Seilroboters beliebige Seilkraftverteilungen (siehe Beispiel in Abb. 1.5) gewählt werden. Aus praktischer Sicht hingegen ist die kleinste, also *minimale* Seilkraftverteilung zu bevorzugen, die sich innerhalb des Bereichs der zulässigen Seilkräfte befindet, weil dadurch der Energieaufwand minimal wird. Zusammengefasst

---

<sup>1</sup>Seile können nur Zugkräfte übertragen, siehe Abschnitt 5.

sind drei Punkte bei der Suche nach der minimal zulässigen Seilkraftverteilung zu berücksichtigen:

- minimal und maximal zulässige Seilkräfte,
- Statik/Dynamik des Seilroboters,
- minimale Seilkraftverteilung.

Dieses Problem lässt sich nun mit Hilfe eines mathematischen Optimierungsproblems, genauer, eines *konvexen quadratischen Optimierungsproblems*<sup>2</sup> formulieren:

$$\min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n} \quad \mathcal{Z}(\mathbf{f}) = \frac{1}{2} \mathbf{f}^\top \mathbf{f}, \quad (3.1a)$$

$$\text{u. d. N.} \quad \mathbf{A}^\top \mathbf{f} = -\mathbf{w}, \quad (3.1b)$$

$$\mathbf{f}_{\min} \leq \mathbf{f} \leq \mathbf{f}_{\max}, \quad (3.1c)$$

wobei  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  der Vektor der  $n$  Seilkräfte ist,  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$  der Vektor der eingprägten Kräfte, wie beispielsweise der Gewichtskraft der Plattform,  $\mathbf{f}_{\min}, \mathbf{f}_{\max} \in \mathbb{R}^n$  die zulässigen minimalen und maximalen Seilkräfte und  $m$  die Anzahl der Endeffektor-Freiheitsgrade<sup>3</sup>. Die Matrix  $\mathbf{A}^\top \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist die sogenannte Strukturmatrix, ein auf der Geometrie des Seilroboters basierendes Konstrukt, dessen Herleitung in Abschnitt 5 erklärt wird. Während Gl. (3.1b) die Statik des Seilroboters<sup>4</sup> charakterisiert und Gl. (3.1c) den zulässigen Bereich der Seilkräfte einschränkt, führt die Minimierung der Zielfunktion  $\mathcal{Z}(\mathbf{f})$  zur Lösung der minimalen Seilkraftverteilung im Sinne der quadratischen Optimierung.

Dieses Optimierungsproblem soll anhand des Beispiels eines einfachen Seilroboters erläutert werden (Abb. 3.1, links). Dabei handelt es sich um einen ebenen, im Schwerfeld der Erde befindlichen Seilroboter, dessen Plattform einen Freiheitsgrad entlang der  $x$ -Achse hat ( $m = 1$ ) und von zwei Seilen ( $n = 2$ ) verspannt wird. Aus dem Freischnitt der Plattform (Abb. 3.1, rechts) lässt sich das Kräftegleichgewicht in  $x$ -Richtung zu

$$f_1 - f_2 - F_G = 0 \quad (3.2)$$

<sup>2</sup>Die Bezeichnung wird im kommenden Abschnitt noch erläutert.

<sup>3</sup>Ungleichungen von Vektoren werden hier und im Laufe der gesamten Arbeit komponentenweise verstanden.

<sup>4</sup>Lässt sich auf die Dynamik entsprechend erweitern!

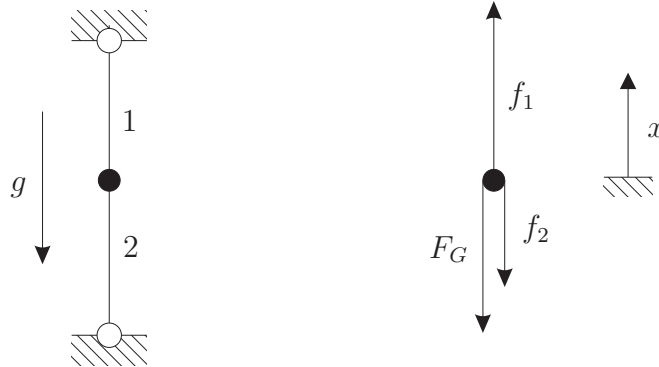


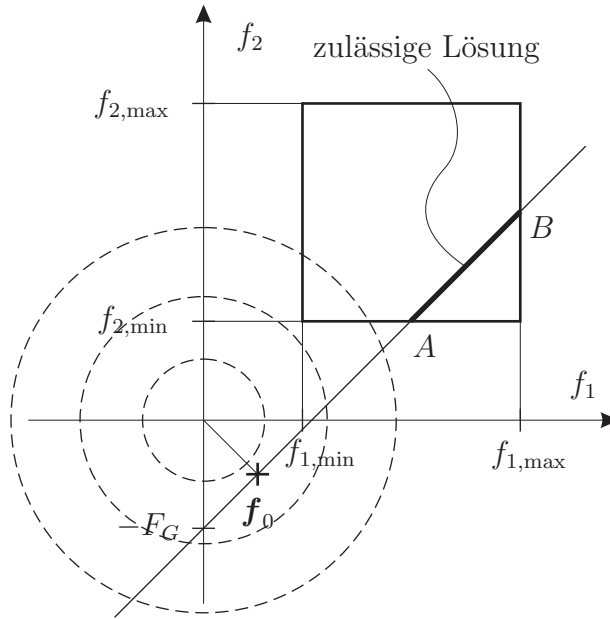
Abbildung 3.1: Links: Einfaches Beispiel eines ebenen, von zwei Seilen verspannten Seilroboters im Schwerfeld der Erde mit einem Freiheitsgrad entlang der  $x$ -Achse ( $n = 2, m = 1$ ). Rechts: Freischnitt der punktförmigen Plattform.

bestimmen<sup>5</sup>, wobei  $f_1$  und  $f_2$  die Seilkräfte sind und  $F_G$  die Gewichtskraft der Plattform. Damit lässt sich das Kräftegleichgewicht einfach in eine Form gemäß Gl. (3.1b) darstellen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A^\top} \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} = \underbrace{F_G}_{-w}. \quad (3.3)$$

Während in der Einleitung in Abschnitt 1.2.2 eine graphische Herangehensweise mit Hilfe von Kräftepolygonen erfolgte, wird hier der Raum der Seilkräfte betrachtet, da er wegen  $n = 2$  gut veranschaulicht werden kann. Im  $n$ -dimensionalen Raum der Seilkräfte stellen die einfachen linearen Ungleichungsbedingungen (3.1c) einen  $n$ -dimensionalen Quader, hier ein Rechteck dar, weswegen diese Art der Ungleichungen im Folgenden Quaderbedingungen genannt werden sollen (engl. box constraints). Daran ist erkennbar, dass Ungleichungen den Bereich des  $n$ -dimensionalen Lösungsraums einschränken, ohne dabei dessen Dimension zu reduzieren. Anders bei Gleichungen, wodurch die Dimension des Lösungsraums um die linear unabhängige Anzahl der Gleichungen reduziert wird. In diesem Beispiel beschreibt Gl. (3.3) eine Gleichung ( $m = 1$ ) bei zwei Unbekannten  $f_1$  und  $f_2$  ( $n = 2$ ) mit der Dimension des Lösungsraums, d. h. der Redundanz  $r = n - m = 2 - 1 = 1$ . Sie entspricht einer Geraden mit der Gleichung  $f_2 = f_1 - F_G$ . Die um den Ursprung angeordneten konzentrischen Kreise stellen die Höhenlinien der quadratischen Zielfunktion  $\mathcal{Z}(\mathbf{f})$  dar. Deren Mittelpunkt  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  bildet das sogenannte unrestringierte Minimum (engl. unconstrained minimum), also das Minimum der Zielfunktion ohne Nebenbedingun-

<sup>5</sup>Das Momentengleichgewicht leistet hier keinen Beitrag.

Abbildung 3.2: Raum der Seilkräfte für  $n = 2$  des Beispiels.

gen<sup>6</sup>. Daneben gibt es das Minimum nur unter Berücksichtigung der Gleichungen. Dieser Punkt  $\mathbf{f}_0$  liegt in diesem Beispiel auf der Geraden mit dem kürzesten Abstand zum unrestringierten Minimum, also eigentlich auf dem niedrigst möglichen Höhenniveau. Hier ist erkennbar, dass  $\mathbf{f}_0$  im Allgemeinen nicht im gültigen Rechteckbereich liegen muss. Diese Lösung entspricht dabei der „klassischen“ Lösung, welches man rechnerisch mit der PENROSE-MOORE-Pseudoinversen ermitteln kann. Denn aus (3.1a) und (3.1b) ergibt sich die LAGRANGE-Funktion zunächst zu

$$\mathcal{L}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{Z}(\mathbf{f}) - \boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{f} + \mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{f}^\top \mathbf{f} - \boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{f} + \mathbf{w}). \quad (3.4)$$

Als notwendige Bedingung müssen die partiellen Ableitungen gleich Null sein, also

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{f}} = \mathbf{f} - \mathbf{A} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad (3.5a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{f} + \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (3.5b)$$

Auflösen von Gl. (3.5a) nach  $\mathbf{f}$  und Einsetzen in Gl. (3.5b) liefert

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{w}. \quad (3.6)$$

Unter der Voraussetzung, dass die quadratische Matrix  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$  nicht-singulär ist<sup>7</sup>, ergibt sich

$$\boldsymbol{\lambda} = -(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{w}. \quad (3.7)$$

<sup>6</sup>Zum Vergleich: das Minimum von  $x^2$  liegt an der Stelle  $x = 0$ .

<sup>7</sup>d. h. die Spalten von  $\mathbf{A}$  bzw. die Zeilen von  $\mathbf{A}^\top$  sind linear unabhängig.

Dieses Ergebnis eingesetzt in Gl. (3.5a) und aufgelöst nach  $\mathbf{f}$  ergibt schließlich

$$\mathbf{f} = -\mathbf{A} (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{w} = -(\mathbf{A}^+)^{\top} \mathbf{w}, \quad (3.8)$$

wobei  $(\mathbf{A}^+)^{\top} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}$  die Transponierte der bekannten PENROSE-MOORE-Pseudoinversen ist<sup>8</sup>. Einsetzen der Strukturmatrix aus Gl. (3.3) in Gl. (3.8) liefert nach einigen Umformungen das Minimum des Beispiels unter ausschließlicher Berücksichtigung der Gleichungs-Nebenbedingungen

$$\mathbf{f}_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} F_G, \quad (3.9)$$

welches anhand Abb. 3.2 bestätigt werden kann. An der expliziten Lösung ist nun auch erkennbar, dass  $\mathbf{f}_0$  keine gültige Seilkraftverteilung darstellt. Nach Abb. 3.2 kann die gültige Lösung nur irgendwo auf der Geraden innerhalb des Rechtecks, also auf dem Streckenabschnitt zwischen  $A$  und  $B$  liegen. In diesem Beispiel ist sofort erkennbar, dass gerade der Punkt  $A$  das zulässige Minimum des Optimierungsproblems unter Berücksichtigung *aller* Nebenbedingungen darstellt. Er ist der einzige zulässige Punkt, der auf dem niedrigsten Höhenniveau liegt. Während dieser Punkt für dieses einfache Beispiel noch graphisch ermittelt werden kann, ist ersichtlich, dass für höherdimensionierte Probleme ein entsprechender Algorithmus<sup>9</sup> entwickelt werden muss.

Bei seriellen, kinematisch redundanten Robotern kann man analog vorgehen. Anhand des einleitenden Beispiels in Abschnitt 1.2.1 wird deutlich, dass eine möglichst kleine Änderung der Gelenkkoordinaten von einem Zeitpunkt zum nächsten erwünscht ist, um den Energieaufwand klein zu halten. Des Weiteren ist es notwendig, die Gelenkendanschläge sowie die technisch maximal realisierbaren Gelenkantriebs-Geschwindigkeiten und -Beschleunigungen zu berücksichtigen<sup>10</sup>. Wie im obigen Beispiel bei Seilrobotern können hier eine quadratische Zielfunktion zur Minimierung der Gelenkgeschwindigkeiten und -beschleunigungen und einfache lineare Quaderbedingungen angesetzt werden. Jedoch existiert hierbei die Schwierigkeit, dass die Kinematik des Roboters nicht-linear ist, vgl. dazu Gl. (1.1), so dass kein konvexes quadratisches Optimierungsproblem formuliert werden kann<sup>11</sup>. Ein weit verbreiteter

<sup>8</sup>Die PENROSE-MOORE-Pseudoinverse lautet  $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top$ .

<sup>9</sup>Tatsächlich ist es die Active-Set-Strategie (dt. Strategie der aktiven Mengen), die in den kommenden Abschnitten erläutert wird.

<sup>10</sup>In Komaında (2003) werden Gelenk- und Geschwindigkeitsbegrenzungen durch virtuelle potentielle Feder- und dissipative Kräfte eingeführt. Dies kann an den Grenzen jedoch zu Schwingungen führen und garantiert nicht deren Einhaltung.

<sup>11</sup>Wie im kommenden Abschnitt erklärt werden wird, sind die Nebenbedingungen von quadratischen Programmen linear.

Ansatz die inverse Kinematik zu lösen, ist es daher, die Vorwärtskinematik des Roboters zu linearisieren. Zu diesem Zweck wird die TAYLOR-Reihenentwicklung der Vorwärtskinematik um den Punkt  $\mathbf{q}_0$  betrachtet:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{x}_0 + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}^2} \right|_{\mathbf{q}_0} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^2 + \dots \quad (3.10)$$

Anschließend wird nach dem linearen Glied abgebrochen, so dass eine linearisierte Vorwärtskinematik der Form

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_0 + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{J}(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \quad (3.11)$$

vorliegt, wobei  $\mathbf{J}(\mathbf{q}_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0}$  die JACOBI-Matrix des Endeffektors im Punkt  $\mathbf{q}_0$  darstellt. Damit lässt sich das konvexe quadratische Optimierungsproblem der inversen Kinematik aufstellen:

$$\min_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \quad \mathcal{Z}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^\top (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0), \quad (3.12a)$$

$$\text{u. d. N.} \quad \mathbf{J}(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \quad (3.12b)$$

$$\mathbf{q}_{\min} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{q}_{\max}, \quad (3.12c)$$

Der Fehler, der durch die Linearisierung zustande kommt, kann durch eine nachgeschaltete Korrektur teilweise kompensiert werden<sup>12</sup>. Eine zusätzliche Problematik ist hierbei die numerische Instabilität des Verfahrens in der Nähe von singulären Stellungen, z. B. bei (nahezu) ausgestreckten Konfigurationen. Hier bieten sich die sogenannten *robusten Inversen* an, die in Abschnitt 4.3.4 näher erläutert werden. In diesem Zusammenhang stellen Nakamura und H. (1986) die *damped least-squares inverse* vor. Weiterführende Literatur zu diesem Thema sind beispielsweise Buss (2004); Buss und Kim (2005); Deo und Walker (1995); Pechev (2008).

Anhand dieser beiden Beispiele (Seilroboter und serieller, kinematisch redundanter Roboter) ist erkennbar, dass die grundlegenden Fragestellungen Seilkraftberechnung und inverse Kinematik jeweils als konvexes quadratisches Optimierungsproblem formuliert und daher mit den gleichen Methoden gelöst werden können. Die folgenden Abschnitte befassen sich deshalb mit den Grundlagen der konvexen quadratischen Optimierung und deren numerischer Lösungsverfahren.

<sup>12</sup>Andere Ansätze wie beispielsweise in Schlemmer (2000) gehen von der nichtlinearen Vorwärtskinematik aus. Diese nichtlinearen Nebenbedingungen führen zu nichtlinearen Optimierungsproblemen. Ein bewährter numerischer Lösungsansatz ist hier das SQP-Verfahren (engl. Sequential Quadratic Programming), der jedoch hier nicht weiter verfolgt wird. Die Lösung liefert eine numerisch beliebig exakte inverse Kinematik, allerdings können die höheren Rechenzeiten für Echtzeit-Anwendungen problematisch werden, wenn keine leistungsfähigen Mikrocontroller zur Verfügung stehen.



## 3.2 Konvexe quadratische Optimierungsprobleme

In dieser Arbeit gilt das Hauptaugenmerk einer speziellen Klasse von Optimierungsproblemen, nämlich die der Form

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{d}^\top \mathbf{x} \quad (3.13a)$$

$$\text{u. d. N. } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3.13b)$$

$$\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}, \quad (3.13c)$$

mit

$$\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{ positiv semidefinit,}$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n,$$

$$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1},$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{l}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

Dabei handelt es sich wegen der quadratischen Zielfunktion und den linearen Nebenbedingungen um ein quadratisches Optimierungsproblem, das speziell wegen der positiven Semidefinitheit der HESSE-Matrix  $\mathbf{G}$ , d.h.  $\mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x} \geq 0$  konvex ist. Da sämtliche Nebenbedingungen linear und damit konvex sind, ist das lokale Minimum des Optimierungsproblems zugleich das globale Minimum (Nocedal und Wright 2006).

Bei den Ungleichungen (3.13c) handelt es sich um einfache lineare Quaderbedingungen (engl. box constraints). Diese lassen sich auch auf folgende Weise ausdrücken:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{l} \\ -\mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

wobei  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Einheitsmatrix darstellt. Mit Einführung der Matrix  $\mathbf{P} = [\mathbf{I}, -\mathbf{I}]^\top \in \mathbb{R}^{2n \times n}$  sowie des Vektors  $\mathbf{c} = [\mathbf{l}^\top, -\mathbf{u}^\top]^\top \in \mathbb{R}^{2n}$  und dessen Komponenten  $c_i$ , mit

$$i \in \mathbb{U} = \{1, \dots, n, n+1, \dots, 2n\}, \quad (3.15)$$

ergibt sich ein äquivalentes Optimierungsproblem der Form

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{d}^\top \mathbf{x} \quad (3.16a)$$

$$\text{u. d. N. } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.16b)$$

$$\mathbf{P} \mathbf{x} \geq \mathbf{c}. \quad (3.16c)$$

Die Nebenbedingungen in (3.16) bzw. (3.13) bilden den zulässigen Lösungsraum des Quadratischen Programms. Unter der Voraussetzung, dass der Lösungsraum nicht leer ist, hat dieser die Form eines Polytops der Dimension  $r = n - m$  (siehe dazu Anhang B).

Die LAGRANGE-Funktion nach Gl. (2.8) für das quadratische Programm (3.16) lautet zunächst

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{d}^\top \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}) - \boldsymbol{\mu}^\top (\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{c}). \quad (3.17)$$

Das globale Optimum  $[\mathbf{x}^{*\top}, \boldsymbol{\lambda}^{*\top}, \boldsymbol{\mu}^{*\top}]^\top$  des quadratischen Programms in (3.16) mit der optimalen aktiven Menge  $\mathbb{A}(\mathbf{x}^*)$  genügt dann den KKT-Bedingungen (2.11) und Gl. (2.13)

$$\mathbf{G} \mathbf{x}^* + \mathbf{d} - \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^* - \mathbf{P}_{\mathbb{A}}^\top \boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{0}, \quad (3.18a)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x}^* = \mathbf{b}, \quad (3.18b)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbb{A}} \mathbf{x}^* = \mathbf{c}_{\mathbb{A}}, \quad (3.18c)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbb{I}} \mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}_{\mathbb{I}}, \quad \mathbb{I} = \mathbb{U} \setminus \mathbb{A}, \quad (3.18d)$$

$$\boldsymbol{\mu}^* \geq \mathbf{0}, \quad (3.18e)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}, \quad (3.18f)$$

wobei  $\mathbf{P}_{\mathbb{A}}$  aus den „aktiven“ Zeilen von  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{c}_{\mathbb{A}}$  aus den „aktiven“ Elementen von  $\mathbf{c}$  besteht. Entsprechend sind  $\mathbf{P}_{\mathbb{I}}$  und  $\mathbf{c}_{\mathbb{I}}$  die Matrix und die rechte Seite der inaktiven Ungleichungen.

### 3.3 Lösung von konvexen quadratischen Optimierungsproblemen

Es existieren verschiedene Algorithmen zur Lösung von quadratischen Optimierungsproblemen. Diese lassen sich hauptsächlich in die *Strategie der Aktiven Menge* (engl. Active-Set strategy) und *Innere-Punkte-Verfahren* (engl. Interior-Point methods) aufteilen. Bei beiden handelt es sich um iterative Algorithmen, wobei die Active-Set Methoden für Probleme der vorliegenden Größenordnung (engl. small- to medium-scale problems) am effektivsten erscheinen was den rechnerischen Aufwand<sup>13</sup> betrifft

<sup>13</sup>Es ist bekannt, dass Interior-Point-Verfahren polynomiales, während Active-Set Methoden – wie beispielsweise DANTZIGs berühmter Simplex-Algorithmus zur Lösung linearer Programme – im *Worst-Case* exponentiales Laufzeit-Verhalten aufweisen. Jedoch sind letztere bei vielen praktischen Anwendungen viel effizienter als im theoretischen Worst-Case (siehe z. B. Bazaraa u. a. 2004).

(siehe Nocedal und Wright 1999). Aus diesem Grunde werden im Folgenden die Innere-Punkte-Verfahren nicht mehr weiter verfolgt. Einen Überblick dazu liefern z. B. Murty (2006); Boggs (1996); Nocedal und Wright (2006).

Zu den frühesten Active-Set „ähnlichen“ Algorithmen zur Lösung konvexer quadratischer Programme gehören der Algorithmus von WOLFE (Domschke und Drexl 1998; Dantzig 1966; Wolfe 1959), der eine Erweiterung des von DANTZIG entwickelten Simplex-Algorithmus für quadratische Programme ist, und der LEMKE-Algorithmus zur Lösung von linearen Komplementärproblemen<sup>14</sup> (Schäfer 2008; Lemke 1962). Beide Algorithmen basieren auf Berechnungen mit Hilfe von Simplex-Tableaus (Gill u. a. 1991; Bazaraa u. a. 2004; Griva u. a. 2009).

Im Folgenden soll der klassische Active-Set Algorithmus kurz erläutert werden. Wäre die optimale aktive Menge  $\mathbb{A}(\mathbf{x}^*)$  im Voraus schon bekannt, so lieferte das lineare Gleichungssystem aus Gl. (3.18a) bis Gl. (3.18c) die Lösung des Optimierungsproblems gemäß

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{A}^\top & -\mathbf{P}_{\mathbb{A}}^\top \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{\mathbb{A}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \boldsymbol{\lambda}^* \\ \boldsymbol{\mu}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{d} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c}_{\mathbb{A}} \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

wobei die Koeffizientenmatrix auf der linken Seite auch KKT-Matrix genannt wird. Ist die optimale aktive Menge leer, d. h.  $\mathbb{A} = \emptyset$ , reduziert sich das zu lösende Gleichungssystem zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{A}^\top \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \boldsymbol{\lambda}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{d} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Da im Allgemeinen die optimale aktive Menge zu Beginn der Optimierung unbekannt ist, besteht die Aufgabe der Active-Set Strategie also darin,  $\mathbb{A}(\mathbf{x}^*)$  zu finden. Beginnend mit einer Schätzung der optimalen aktiven Menge wird in jeder Iteration, abhängig von Gradienten-Informationen und Zuständen der LAGRANGE-Multiplikatoren, ein Index der entsprechenden Ungleichung der aktuellen Indexmenge hinzugefügt oder aus ihr entfernt, bis das Optimum mit Hilfe der KKT-Bedingungen (3.18) festgestellt wird (Nocedal und Wright 2006).

Im  $k$ ten Iterationsschritt wird demnach ein quadratisches Unterproblem gemäß des linearen Gleichungssystems 3.19 gelöst, wobei anstatt der unbekannten optimalen aktiven Menge  $\mathbb{A}(\mathbf{x}^*)$  deren aktuelle Schätzung, die sog. Arbeitsmenge  $\mathbb{W}^k$  (engl. working set) einfließt. Diese beinhaltet eine aktive Untermenge der Ungleichungen (3.16c), d. h.  $\mathbb{W}^k \subset \mathbb{U}$ , wobei  $|\mathbb{W}^k| \leq r = n - m$ . Die inaktiven Ungleichungen,

<sup>14</sup>engl. LCP, Linear Complementary Problem

also  $\mathbb{I}^k = \mathbb{U} \setminus \mathbb{W}^k$  werden dabei ignoriert. Wichtig hierbei ist, dass alle Gleichungen in  $\mathbb{G}$  und alle aktiven Ungleichungen in  $\mathbb{W}^k$  zusammen linear unabhängig sind:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{A}^\top & -\mathbf{P}^{k,\top} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda}^k \\ \boldsymbol{\mu}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{d} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^k \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

wobei  $\mathbf{P}^k := \mathbf{P}_{\mathbb{W}^k}$  und  $\mathbf{c}^k := \mathbf{c}_{\mathbb{W}^k}$ .

Active-Set Methoden unterscheiden sich voneinander dadurch, dass in jedem Iterationsschritt entweder *primal*, *dual* oder *primal-dual* zulässige Optimierungsschritte (engl. primal, dual, primal-dual feasible steps) durchgeführt werden. Bei den primalen Methoden wird sichergestellt, dass die Lösung  $\mathbf{x}$  des quadratischen Unterproblems (3.21) – und die Startschätzung  $\mathbf{x}^0$  – stets die Ungleichungs-Nebenbedingungen (3.16c) erfüllt, also primal zulässig ist, während einige der aktiven LAGRANGE-Multiplikatoren  $\mu_i^k < 0, i \in \mathbb{W}^k$  negativ sein können. Zu beachten ist, dass die LAGRANGE-Multiplikatoren der Gleichungs-Nebenbedingungen  $\lambda_i^k, i \in \mathbb{G}$  gemäß den KKT-Bedingungen (2.11d) beliebig aus  $\mathbb{R}$  sein können. Das Optimum wird somit detektiert, wenn in einem der folgenden Iterationsschritte die KKT-Bedingung (3.18f) erfüllt ist.

Die dualen Methoden zeichnen sich dadurch aus, dass die Lösung des  $k$ ten Iterationsschritts  $\boldsymbol{\mu}^k$  – und die Startschätzung  $\boldsymbol{\mu}^0$  – stets dual zulässig sind, d. h.  $\boldsymbol{\mu}^k \geq \mathbf{0}$  und einige der Ungleichungen (3.16c) verletzt sein können. Bei diesen Methoden wird daher das Optimum erfasst, wenn in einem Iterationsschritt zugleich alle Ungleichungen bzw. die KKT-Bedingungen (3.18d) erfüllt sind.

Der folgende Abschnitt soll einen kurzen Überblick über den primalen Active-Set Algorithmus geben. Sinnvollerweise wird jedes quadratische Unterproblem im Iterationsschritt  $k$  bezüglich der Richtung  $\mathbf{p}^k$  im Unterraum der Gleichungen und aktiven Ungleichungen in  $\mathbb{W}^k$  gelöst. Mit

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^k + \mathbf{p}^k \quad (3.22)$$

eingesetzt in Gl. (3.21) ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{A}^\top & -\mathbf{P}^{k,\top} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}^k \\ \boldsymbol{\lambda}^k \\ \boldsymbol{\mu}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{d} - \mathbf{G} \mathbf{x}^k \\ \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^k \\ \mathbf{c}^k - \mathbf{P}^k \mathbf{x}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}^k \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

wobei  $\mathbf{g}^k = \mathbf{G} \mathbf{x}^k + \mathbf{d}$  der Gradient der quadratischen Zielfunktion (3.13a) ist.

Nun müssen zwei Fälle unterschieden werden:

1. Wenn  $\mathbf{p}^k \neq \mathbf{0}$ , muss sichergestellt werden, dass die Lösung  $\mathbf{x}^{k+1}$ , welche gemäß Gl. (3.22) entlang der Richtung  $\mathbf{p}^k$  liegt, alle primalen Ungleichungs-Nebenbedingungen erfüllt, also primal zulässig ist. Dies wird mit Hilfe des so genannten Schrittweiten-Parameters  $\alpha^k$  folgendermaßen realisiert:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{p}^k. \quad (3.24)$$

Der skalare Schrittweiten-Parameter  $\alpha^k$  muss – so groß wie möglich – im Intervall  $[0, 1]$  liegen, aber höchstens so groß sein, dass  $\mathbf{x}^{k+1}$  den zulässigen Lösungsraum nicht verlässt. Da  $\alpha^k$  nur eine Skalierung von  $\mathbf{p}^k$  im Unterraum aus den Gleichungs- und aktiven Ungleichungs-Nebenbedingungen bewirkt, und dieser nicht verlassen wird, müssen alle inaktiven Ungleichungen auf Zulässigkeit überprüft werden, die  $\alpha^k$  im Intervall  $[0, 1]$  „blockieren“ könnten. Gemäß Nocedal und Wright (2006) ergibt sich speziell für die Quader-Bedingungen (3.13c) folgende Definition für den maximal zulässigen Schrittweiten-Parameter und dessen Index:

$$\alpha^k = \min(1, \min\{\alpha_i\}), \quad i^k = \arg \min^{15} \{\alpha_i\} \quad (3.25)$$

mit

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{c_i^k - [\mathbf{P}^k]_i^\top \mathbf{x}^k}{[\mathbf{P}^k]_i^\top \mathbf{p}^k}, & [\mathbf{P}^k]_i^\top \mathbf{p}^k < 0 \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}, \quad i \in \mathbb{U} \setminus \mathbb{W}^k, \quad (3.26)$$

wobei  $[\mathbf{P}^k]_i^\top$  die  $i$ te Zeile der Matrix  $\mathbf{P}^k$  darstellt.

Ist der Schrittweiten-Parameter  $\alpha^k < 1$ , bedeutet dies, dass dessen entsprechende Ungleichung den primalen Schritt entlang  $\mathbf{p}^k$  blockiert, und für den nächsten Iterationsschritt wird der zu  $\alpha^k < 1$  gehörende Index  $i^k$  der aktuellen Arbeitsmenge hinzugefügt d. h.  $\mathbb{W}^{k+1} = \mathbb{W}^k \cup i^k$ .

Für  $\alpha^k = 1$  hingegen gibt es keine blockierende Ungleichung, also gilt dann  $\mathbb{W}^{k+1} = \mathbb{W}^k$ .

2. Aus  $\mathbf{p}^k = \mathbf{0}$  ist erkennbar, dass  $\mathbf{x}^k$  die Lösung des quadratischen Unterproblems ist und die LAGRANGE-Multiplikatoren aller Gleichungen aus  $\mathbb{E}$  und aktiven Ungleichungen aus  $\mathbb{W}^k$  gemäß Gl. (3.23) durch

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P}_k^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^k \\ \boldsymbol{\mu}^k \end{bmatrix} = \mathbf{g}^k \quad (3.27)$$

---

<sup>15</sup>Die  $\arg \min$ -Funktion ermittelt die Position (hier Index  $i$ ), bei der sie ihr Minimum hat. Entsprechendes gilt für die Funktion  $\arg \max$ .

bestimmt werden können. Da gemäß den KKT-Bedingungen (2.11d)  $\lambda_i^k \in \mathbb{R}$  beliebig,  $i \in \mathbb{G}$  und für alle inaktiven Ungleichungen nach Gl. (2.12)  $\mu_i^k = 0, i \in \mathbb{U} \setminus \mathbb{W}^k$ , müssen  $\mu_i^k, i \in \mathbb{W}^k$  auf ihr Vorzeichen geprüft werden. Sind sämtliche dieser LAGRANGE-Multiplikatoren nicht-negativ, werden auch die KKT-Bedingungen (2.11e) ausnahmslos erfüllt, und  $\mathbf{x}^k$  ist – aufgrund der Positiv-Semidefinitheit von  $\mathbf{G}$  – das globale Optimum des quadratischen Optimierungsproblems (3.13).

Für den Fall, dass mindestens ein Multiplikator  $\mu_i^k, i \in \mathbb{W}^k$  negativ ist, sind die KKT-Bedingungen (2.11e) nicht erfüllt und einer der Indizes der negativen Multiplikatoren, beispielsweise

$$i^k = \arg \min \{ \mu_i^k < 0 \mid i \in \mathbb{W}^k \} \quad (3.28)$$

wird aus der Arbeitsmenge entfernt und  $\mathbb{W}^{k+1} = \mathbb{W}^k \setminus i^k$  für den nächsten Iterationsschritt verwendet.

Damit kann nun der primale Active-Set Algorithmus (Alg. 1) zur Lösung konvexer quadratischer Programme aufgestellt werden. Dieser ist aus Nocedal und Wright (2006) entnommen, aber für Quader-Bedingungen gemäß Gl. (3.13c) angepasst.

Dieser vorgestellte primale Active-Set Algorithmus erfordert eine primal zulässige Startlösung  $\mathbf{x}^0$ , welche sowohl die Quader-Bedingungen (3.13c) als auch die Gleichungen (3.13b) erfüllen muss. Diese Startlösung ist im Allgemeinen nicht direkt ermittelbar und erfordert daher eine Vorooptimierung, die so genannte erste Phase oder Zulässigkeits-Phase (engl. feasibility phase), in der eine primal zulässige Startlösung beispielsweise unter Verwendung eines linearen Hilfsprogramms mittels Simplex-Algorithmus (Bazaraa u. a. 2004; Alevras und Padberg 2001; Dantzig 1966) bestimmt werden kann. Die Lösung des Hilfsprogramms ist nicht notwendigerweise die Lösung des originalen quadratischen Programms (3.13), so dass im zweiten Schritt die eigentliche Optimierung, also die Optimierungs-Phase erfolgen muss (siehe auch Nocedal und Wright 2006; Bartlett und Biegler 2006; Gill und Wong 2010; Wong 2011; Gill u. a. 1991, 1981; Griva u. a. 2009).

Eine Alternative liefert der Algorithmus von GOLDFARB-IDNANI (Goldfarb und Idnani 1983). Dabei handelt es sich um einen dualen Active-Set Algorithmus, dessen Startlösung  $\mathbf{x}^0$  dual zulässig ist. Diese Startlösung ist einfacher zu ermitteln, da es sich dabei um das unrestringierte Minimum, bzw. in diesem Fall um die Lösung des quadratischen Optimierungsproblems ohne Berücksichtigung der Ungleichungs-Nebenbedingungen handelt. Daher sind zu Beginn der Iteration alle Ungleichungen

---

**Algorithmus 1** Primaler Active-Set Algorithmus für konvexe quadratische Programme (aus Nocedal und Wright 2006), angepasst für Quader-Bedingungen

---

**Eingabe:** primal zulässige Startlösung  $\mathbf{x}^0$ , Untermenge  $\mathbb{W}^0$  aus der aktiven Menge in  $\mathbf{x}^0$

**für**  $k \leftarrow 0, 1, 2, \dots$  **wiederhole**

bestimme  $\mathbf{p}^k$  mit Gl. (3.23)

**falls**  $\mathbf{p}^k = \mathbf{0}$  **dann**

bestimme LAGRANGE-Multiplikatoren  $\boldsymbol{\mu}^k$  aus Gl. (3.27) oder direkt aus Gl. (3.23)

**falls**  $\boldsymbol{\mu}^k \geq \mathbf{0}$  **dann**

Stopp, mit  $\mathbf{x}^* \leftarrow \mathbf{x}^k$  ist optimal,  $\mathbb{W}^* \leftarrow \mathbb{W}^k$  ist aktive Menge in  $\mathbf{x}^*$

**sonst** /\*  $\boldsymbol{\mu}^k \not\geq \mathbf{0}$  \*/

bestimme  $i^k \leftarrow \arg \min \{ \mu_i^k < 0 \mid i \in \mathbb{W}^k \}$ , vgl. Gl. (3.28)

setze  $\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow \mathbf{x}^k$  und  $\mathbb{W}^{k+1} \leftarrow \mathbb{W}^k \setminus i^k$

**ende falls**

**sonst** /\*  $\mathbf{p}^k \neq \mathbf{0}$  \*/

bestimme  $\alpha^k$  und  $i^k$  mit Gl. (3.26)

setze  $\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{p}^k$

**falls**  $\alpha^k < 1$  **dann** /\* blockierende Ungleichung existiert \*/

setze  $\mathbb{W}^{k+1} \leftarrow \mathbb{W}^k \cup i^k$

**sonst** /\*  $\alpha^k = 1$ , keine blockierende Ungleichung \*/

setze  $\mathbb{W}^{k+1} \leftarrow \mathbb{W}^k$

**ende falls**

**ende falls**

**ende für**

---

inaktiv, d.h.  $\mathbb{W}^0 = \emptyset$ , so dass alle LAGRANGE-Multiplikatoren anfänglich Null sind,  $\mu_i^0 = 0, i \in \mathbb{U}$  und damit die KKT-Bedingungen (3.18f) für duale Zulässigkeit erfüllen werden. Der von GOLDFARB-IDNANI entwickelte Algorithmus ist für streng konvexe quadratische Programme vorgesehen und wurde von Boland (1996) für konvexe quadratische Programme erweitert. Eine auf dem SCHUR-Komplement basierende Implementierung des GOLDFARB-IDNANI-Algorithmus findet sich in Bartlett und Biegler (2006). Nahon und Angeles (1992) verwenden den GOLDFARB-IDNANI-Algorithmus für die echtzeitfähige Kraftberechnung in kinematischen Ketten.

Eine andere Möglichkeit bietet der nach Nocedal und Wright (2006) vorgestellte Big- $M$  Ansatz, bei dem die quadratische Zielfunktion durch einen linearen Strafterm (engl. penalty) mit einem genügend großen Koeffizienten  $M$  unter Einführung

einer zusätzlichen skalaren Variable  $t$  erweitert wird. Dies liefert angewendet auf das quadratische Optimierungsproblem (3.16)

$$\min_{\mathbf{x}, t} \quad \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{d}^\top \mathbf{x} + M t \quad (3.29a)$$

$$\text{u. d. N.} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{1} t \geq \mathbf{b}, \quad (3.29b)$$

$$-\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{1} t \geq -\mathbf{b}, \quad (3.29c)$$

$$\mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{1} t \geq \mathbf{c}, \quad (3.29d)$$

$$t \geq 0, \quad (3.29e)$$

wobei  $\mathbf{1}$  ein mit Einsen gefüllter Spaltenvektor entsprechender Länge ist. Mit diesem Ansatz werden sowohl Zulässigkeits- und Optimierungsphase miteinander kombiniert, so dass auf ein Hilfsprogramm verzichtet werden kann. Existieren für das originale quadratische Programm (3.16) zulässige Punkte, dann ist für genügend große  $M$  die Lösung von (3.29)  $t = 0$ , wobei  $\mathbf{x}$  die Lösung von Gl. (3.16) ist (Nocedal und Wright 2006). Eine primal zulässige Startlösung dieses Big- $M$  Ansatzes ist

$$\mathbf{x}^0 = \hat{\mathbf{x}}, \quad t^0 = \max(\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^0, -\mathbf{b} + \mathbf{A} \mathbf{x}^0, \mathbf{c} - \mathbf{P} \mathbf{x}^0, 0), \quad (3.30)$$

wobei  $\hat{\mathbf{x}}$  eine Näherungslösung und  $\max(\cdot)$  komponentenweise zu verstehen ist.

Eine Schwierigkeit dieses Big- $M$  Ansatzes ist es, den Parameter  $M$  geeignet zu wählen (Nocedal und Wright 2006). Aufgrund des im Allgemeinen hohen Wertes von  $M$  ergeben sich außerdem numerische Schwierigkeiten, die schwer zu kontrollieren sind.

Der folgende Abschnitt greift den Ansatz der Big- $M$  Methode aus Gl. (3.29) auf und beschreibt darauf aufbauend die Entwicklung einer primalen Active-Set Methode, die den numerischen Nachteil aufgrund des hohen Wertes von  $M$  kompensiert.

### 3.4 Modifizierter Big- $M$ Ansatz

Im Gegensatz zum Big- $M$  Ansatz von Nocedal und Wright (2006), bei dem die Gleichungs-Nebenbedingungen durch äquivalente Ungleichungen<sup>16</sup> ersetzt werden,

---

<sup>16</sup>  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b} \wedge \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b} \leq \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$



bleiben die Gleichungs-Nebenbedingungen bei diesem Ansatz erhalten. Damit lautet das quadratische Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x}, t} \quad \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{d}^\top \mathbf{x} + M t, \quad (3.31a)$$

$$\text{u. d. N.} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3.31b)$$

$$\mathbf{l} - \mathbf{1} t \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} + \mathbf{1} t, \quad (3.31c)$$

$$t \geq 0 \quad (3.31d)$$

bzw. unter Verwendung von Gl. (3.14)

$$\min_{\mathbf{x}, t} \quad \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{d}^\top \mathbf{x} + M t, \quad (3.32a)$$

$$\text{u. d. N.} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3.32b)$$

$$\mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{1} t \geq \mathbf{c}, \quad (3.32c)$$

$$t \geq 0 \quad (3.32d)$$

oder kürzer

$$\min_{\mathbf{x}, t} \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ M \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{bmatrix}, \quad (3.33a)$$

$$\text{u. d. N.} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{bmatrix} = \mathbf{b}, \quad (3.33b)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.33c)$$

Die Indexmenge der Ungleichungen lautet nun, vgl. mit (3.15),

$$\mathbb{U} = \{1, \dots, n, n+1, \dots, 2n, 2n+1\}. \quad (3.34)$$

Mit der LAGRANGE-Gleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \mu_t) = & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{d}^\top \mathbf{x} + M t \\ & - \boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}) - \boldsymbol{\mu}^\top (\mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{1} t - \mathbf{c}) - \mu_t t \end{aligned} \quad (3.35)$$

ergibt sich für das globale Optimum  $[\mathbf{x}^{*\top}, t^*, \boldsymbol{\lambda}^{*\top}, \boldsymbol{\mu}^{*\top}, \mu_t^{*\top}]^\top$  und die optimale aktive Menge  $\mathbb{A}(\mathbf{x}^*)$  – wobei  $2n + 1 \in \mathbb{A}(\mathbf{x}^*)$  – gemäß den KKT-Bedingungen (2.11) bzw. (3.18)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^\top} = \mathbf{G} \mathbf{x}^* + \mathbf{d} - \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^* - \mathbf{P}_\mathbb{A}^\top \boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{0}, \quad (3.36a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = M - \mathbf{1}^\top \boldsymbol{\mu}^* = 0, \quad (3.36b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}^\top} = \mathbf{A} \mathbf{x}^* - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (3.36c)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\mu}^\top} = \mathbf{P}_\mathbb{A} \mathbf{x}^* + \mathbf{1} t^* - \mathbf{c}_\mathbb{A} = \mathbf{0}, \quad (3.36d)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\mu}^\top} = \mathbf{P}_\mathbb{I} \mathbf{x}^* + \mathbf{1} t^* - \mathbf{c}_\mathbb{I} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbb{I} = \mathbb{U} \setminus \mathbb{A}, \quad (3.36e)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_t} = t^* \geq 0, \quad (3.36f)$$

$$\boldsymbol{\mu}^*, \mu_t^* \geq \mathbf{0}. \quad (3.36g)$$

Lautet nach der Optimierung  $t^* > 0$ , ist das Problem nicht lösbar (engl. infeasible), für  $t^* = 0$  existiert eine globale Lösung.

Eine primal zulässige Startlösung  $\mathbf{x}^0$  des quadratischen Programms (3.33) ergibt sich aus der Lösung des linearen Gleichungssystems, vgl. Gl. (3.20),

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{A}^\top \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^0 \\ \boldsymbol{\lambda}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{d} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

und

$$t^0 = \max \left( 0, \max \left\{ c_i - [\mathbf{P}]_i^\top \mathbf{x}^0 \mid i \in \mathbb{U} \right\} \right). \quad (3.38)$$

Für  $t^0 = 0$  sind alle KKT-Bedingungen (3.36) erfüllt, da auch  $\mathbb{W}^0 = \emptyset$  und daher  $\boldsymbol{\mu}^0 = \mathbf{0}$ . Die Startlösung  $\mathbf{x}^0$  ist sowohl primal als auch dual zulässig, womit das globale Optimum von (3.32) und des originalen Problems (3.16) gefunden wäre.

Für  $t^0 > 0$  ist  $\mathbf{x}^0$  nicht optimal, so dass für die folgende Iteration

$$\mathbb{W}^1 = \arg \max \{ \mathbf{c} - \mathbf{P} \mathbf{x}^1 \}, \quad \mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 \quad (3.39)$$

gesetzt werden muss. Im Allgemeinen wird in jeder  $k$ ten Iteration für die Arbeitsmenge  $\mathbb{W}^k \setminus \{2n + 1\}$  entsprechend den Gleichungen (3.36a) bis (3.36d) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}^\top & -\mathbf{P}^{k,\top} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & -\mathbf{1}^\top \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^k & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^k \\ t^k \\ \boldsymbol{\lambda}^k \\ \boldsymbol{\mu}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{d} \\ -M \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^k \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

gelöst. Wie für Gl. (3.23) werden nun

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^k + \mathbf{p}_x^k, \quad t = t^k + p_t^k \quad (3.41)$$

in Gl. (3.40) eingesetzt, so dass sich für die Berechnung der Richtung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}^\top & -\mathbf{P}^{k,\top} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & -1^\top \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^k & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_x^k \\ p_t^k \\ \boldsymbol{\lambda}^k \\ \boldsymbol{\mu}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{d} - \mathbf{G} \mathbf{x}^k \\ -M \\ \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^k \\ \mathbf{c}^k - \mathbf{P}^k \mathbf{x}^k - 1 t^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}^k \\ -M \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

ergibt. Multiplikation der zweiten Zeile von Gl. (3.42) mit  $-1$  liefert

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}^\top & -\mathbf{P}^{k,\top} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 1^\top \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^k & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_x^k \\ p_t^k \\ \boldsymbol{\lambda}^k \\ \boldsymbol{\mu}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}^k \\ M \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Nun wird die rechte Seite der ersten Zeile in Gl. (3.43) mit  $\frac{M}{M}$  erweitert, d. h.

$$\mathbf{G} \mathbf{p}_x^k - \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^k - \mathbf{P}^{k,\top} \boldsymbol{\mu}^k = -\mathbf{g}^k \frac{M}{M}. \quad (3.44)$$

Substitution von im Zähler stehenden  $M$  durch die Gleichung in der zweiten Zeile liefert zunächst

$$\mathbf{G} \mathbf{p}_x^k - \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^k - \mathbf{P}^{k,\top} \boldsymbol{\mu}^k = -\frac{1}{M} \mathbf{g}^k \overbrace{\mathbf{1}^\top \boldsymbol{\mu}^k}^M \quad (3.45)$$

und umgeformt unter Ausklammerung von  $\boldsymbol{\mu}^k$

$$\mathbf{G} \mathbf{p}_x^k - \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^k - \left( \mathbf{P}^{k,\top} - \frac{1}{M} \mathbf{g}^k \mathbf{1}^\top \right) \boldsymbol{\mu}^k = \mathbf{0}. \quad (3.46)$$

Für  $M \rightarrow \infty$  wird die rechte Matrix  $\frac{1}{M} \mathbf{g}^k \mathbf{1}^\top$  im Klammerausdruck zur Nullmatrix:

$$\mathbf{G} \mathbf{p}_x^k - \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda}^k - \mathbf{P}^{k,\top} \boldsymbol{\mu}^k = \mathbf{0}. \quad (3.47)$$

Daraus ergibt sich schließlich das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}^\top & -\mathbf{P}^{k,\top} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 1^\top \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^k & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_x^k \\ p_t^k \\ \boldsymbol{\lambda}^k \\ \boldsymbol{\mu}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Unter der Voraussetzung dass die KKT-Matrix nicht-singulär ist, ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_x^k \\ p_t^k \\ \boldsymbol{\lambda}^k \\ \boldsymbol{\mu}^k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}^\top & -\mathbf{P}^{k,\top} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^k & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{p}_{x,0}^k, p_{t,0}^k, \boldsymbol{\lambda}_0^k, \boldsymbol{\mu}_0^k]^\top}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{x,0}^k \\ p_{t,0}^k \\ \boldsymbol{\lambda}_0^k \\ \boldsymbol{\mu}_0^k \end{bmatrix} M, \quad (3.49)$$

wobei

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}^\top & -\mathbf{P}^{k,\top} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^k & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{x,0}^k \\ p_{t,0}^k \\ \boldsymbol{\lambda}_0^k \\ \boldsymbol{\mu}_0^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Für  $[\mathbf{p}_{x,0}^k \ p_{t,0}^k]^\top = [\mathbf{0} \ 0]^\top$  vereinfacht sich Gl. (3.50) zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top & \mathbf{P}^{k,\top} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_0^k \\ \boldsymbol{\mu}_0^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Der skalare Schrittweiten-Parameter  $\alpha^k$  berechnet sich dann aus

$$\alpha^k = \min(1, \alpha_x^k, \alpha_t^k), \quad i^k = \arg \min(\alpha_x^k, \alpha_t^k) \quad (3.52a)$$

mit

$$\alpha_x^k = \min\{\alpha_i^k\}, \quad (3.52b)$$

$$\alpha_i^k = \begin{cases} \frac{c_i^k - [\mathbf{P}^k]_i^\top \mathbf{x}^k + t^k}{[\mathbf{P}^k]_i^\top \mathbf{p}_x^k + p_t^k}, & [\mathbf{P}^k]_i^\top \mathbf{p}_x^k + p_t^k < 0 \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}, \quad i \in \mathbb{U} \setminus ((2n+1) \cup \mathbb{W}^k) \quad (3.52c)$$

und

$$\alpha_t^k = \begin{cases} -\frac{t^k}{p_t^k}, & p_t^k < 0 \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}, \quad (2n+1) \notin \mathbb{W}^k. \quad (3.52d)$$

Einsetzen von Gl. (3.49) in Gl. (3.52) liefert durch Ausklammern von  $M$

$$\alpha_x^k = \frac{\alpha_{x,0}^k}{M} = \frac{\min\{\alpha_{i,0}^k\}}{M} \quad (3.53a)$$

mit

$$\alpha_{i,0}^k = \begin{cases} \frac{c_i^k - [\mathbf{P}^k]_i^\top \mathbf{x}^k + t^k}{[\mathbf{P}^k]_i^\top \mathbf{p}_{x,0}^k + p_{t,0}^k}, & [\mathbf{P}^k]_i^\top \mathbf{p}_{x,0}^k + p_{t,0}^k < 0 \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}, \quad i \in \mathbb{U} \setminus ((2n+1) \cup \mathbb{W}^k) \quad (3.53b)$$

und

$$\alpha_t^k = \frac{\alpha_{t,0}^k}{M} \quad (3.54a)$$

mit

$$\alpha_{t,0}^k = \begin{cases} -\frac{t^k}{p_{t,0}^k} & p_{t,0}^k < 0 \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}, \quad (2n+1) \notin \mathbb{W}^k. \quad (3.54b)$$

Die zulässigen Lösungen, vgl. mit Gl. (3.24), lauten

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_x^k \mathbf{p}_x^k, \quad t^{k+1} = t^k + \alpha_t^k p_t^k. \quad (3.55)$$

Für  $\alpha^k < 1$  ergeben sich gemäß Gl. (3.52a) durch Einsetzen der Gleichungen (3.49), (3.53a) und (3.54a) in Gl. (3.55) die beiden möglichen Lösungen

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \frac{\alpha_{x,0}^k}{M} \mathbf{p}_{x,0}^k M, \quad t^{k+1} = t^k + \frac{\alpha_{t,0}^k}{M} p_{t,0}^k M, \quad (3.56)$$

und

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \frac{\alpha_{x,0}^k}{M} \mathbf{p}_{x,0}^k M, \quad t^{k+1} = t^k + \frac{\alpha_{t,0}^k}{M} p_{t,0}^k M. \quad (3.57)$$

Elimination von  $M$  führt schließlich zu

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_{x,0}^k \mathbf{p}_{x,0}^k, \quad t^{k+1} = t^k + \alpha_{t,0}^k p_{t,0}^k, \quad (3.58)$$

und

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_{t,0}^k \mathbf{p}_{x,0}^k, \quad t^{k+1} = t^k + \alpha_{t,0}^k p_{t,0}^k. \quad (3.59)$$

Es gilt, laut Abschnitt 3.3, für den skalaren Schrittweiten-Parameter

$$0 \leq \alpha^k \leq 1. \quad (3.60)$$

Einsetzen von Gl. (3.53a) und Gl. (3.54a) in Gl. (3.60) liefert

$$0 \leq \frac{\alpha_{x,0}^k}{M} \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq \frac{\alpha_{t,0}^k}{M} \leq 1 \quad (3.61)$$

bzw.

$$0 \leq \alpha_{x,0}^k \leq M \quad \text{und} \quad 0 \leq \alpha_{t,0}^k \leq M \quad (3.62)$$

und für  $M \rightarrow \infty$

$$0 \leq \alpha_{x,0}^k \leq \infty \quad \text{und} \quad 0 \leq \alpha_{t,0}^k \leq \infty. \quad (3.63)$$

Damit kann die Lösung für die nächste Iteration ohne ein Big- $M$  bestimmt werden:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_0^k \mathbf{p}_{x,0}^k, \quad t^{k+1} = t^k + \alpha_0^k p_{t,0}^k, \quad (3.64)$$

wobei

$$\alpha_0^k = \min(\infty, \alpha_{x,0}^k, \alpha_{t,0}^k), \quad i^k = \arg \min(\alpha_{x,0}^k, \alpha_{t,0}^k). \quad (3.65)$$

In Alg. 2 wird der angepasste Big- $M$ –Active-Set Algorithmus mit  $M \rightarrow \infty$  zusammengefasst. Beginnend mit einer leeren Arbeitsmenge  $W^0$  wird die zugehörige Lösung  $\mathbf{x}^0$  bestimmt und diese daraufhin anhand von  $t^0$  auf (primale) Zulässigkeit überprüft. Für  $t^0 = 0$  ist das Optimum gefunden und der Algorithmus endet. Sonst bildet das Paar  $[\mathbf{x}^1, t^1]^\top$  eine primal zulässige Lösung für die nächste Iteration, wobei die Arbeitsmenge  $W^1$  entsprechend angepasst wird (Zeile 5).

Die darauf folgende Iterationsschleife (Zeilen 7 bis 38) beginnt stets mit einer nicht leeren Arbeitsmenge der Kardinalität  $|W^1| = 1$  und  $t^1 > 0$ . Solange  $t^k > 0$  ist, liegt die Zulässigkeitsphase vor, und in jeder  $k$ -ten Iteration wird  $t^k$  minimiert. Die  $k$ -te Iteration beginnt in dieser Phase mit der Bestimmung der Optimierungsrichtung  $[\mathbf{p}_{x,0}^k, p_{t,0}^k]^\top$  und der entsprechenden LAGRANGE-Multiplikatoren  $\boldsymbol{\mu}^k$  (Zeilen 8 bis 12). Sind die Richtungen  $\mathbf{p}_{x,0}^k$  und  $p_{t,0}^k$  gleich Null, dann ist  $\mathbf{x}^k$  das Optimum bezüglich der aktuellen Arbeitsmenge  $W^k$ , so dass im Folgenden die Überprüfung der LAGRANGE-Multiplikatoren  $\boldsymbol{\mu}^k$  auf Nicht-Negativität erfolgt (Zeilen 14 bis 23). Für den Fall, dass  $\boldsymbol{\mu}^k \geq 0$  und  $t^k > 0$ , existiert keine optimale Lösung des originalen Problems, da es wegen der Verletzung mindestens einer Ungleichung unzulässig ist (engl. infeasible, Zeile 18). Für  $\boldsymbol{\mu}^k \not\geq 0$  wird, wie in Alg. 1, der Index des negativsten LAGRANGE-Multiplikators aus der Arbeitsmenge entfernt (Zeilen 21 bis 22). Für Richtungen  $[\mathbf{p}_{x,0}^k, p_{t,0}^k]^\top \neq \mathbf{0}$  erfolgt die Berechnung des Schrittweiten-Parameters  $\alpha_0^k$  wie in Alg. 1,

---

mit dem Unterschied, dass nun zusätzlich geprüft wird, ob  $\alpha_0^k \neq \alpha_t^k$  (und  $\alpha_0^k < \infty$ , Zeile 32). In diesem Fall wird, wie in Alg. 1 bekannt, der blockierende Index der aktuellen Arbeitsmenge hinzugefügt. Für  $\alpha_0^k = \alpha_t^k$  gilt jedoch  $t^{k+1} = 0$  für alle folgenden  $k$  und die Zulässigkeitsphase ist hiermit beendet (Zeile 35). Daraufhin erfolgt die Optimierungsphase (Strafvariable  $t^k = 0$  für alle folgenden  $k$ ), die im Prinzip aufgebaut ist wie Alg. 1.

---

**Algorithmus 2** Primaler Active-Set Algorithmus für konvexe quadratische Programme für Quader-Bedingungen mit der  $M_\infty$ -Methode

---

**Eingabe:** Leere Arbeitsmenge  $W^0 = \emptyset$

- 1: bestimme  $\mathbf{x}^0$  mit Gl. (3.37) und  $t^0$  mit Gl. (3.38)
  - 2: **falls**  $t^0 = 0$  **dann**
  - 3:   Stopp, mit  $\mathbf{x}^* \leftarrow \mathbf{x}^0$  ist optimal,  $W^* \leftarrow W^0$  ist leere Menge in  $\mathbf{x}^*$
  - 4: **sonst** /\*  $t^0 > 0$  \*/
  - 5:   setze  $\mathbf{x}^1 \leftarrow \mathbf{x}^0$ ,  $t^1 \leftarrow t^0$  und  $W^1 \leftarrow \arg \max \{c_i - [\mathbf{P}]_i^\top \mathbf{x}^1 \mid i \in U\}$ , Gl. (3.39)
  - 6: **ende falls**
  - 7: **für**  $k \leftarrow 1, 2, 3, \dots$  **wiederhole**
  - 8:   **falls**  $t^k > 0$  **dann**
  - 9:     bestimme  $\mathbf{p}_{x,0}^k$ ,  $\mathbf{p}_{t,0}^k$  und  $\boldsymbol{\mu}^k$  mit Gl. (3.50)
  - 10:   **sonst** /\*  $t^0 = 0$  \*/
  - 11:     bestimme  $\mathbf{p}^k$  und  $\boldsymbol{\mu}^k$  mit Gl. (3.23)
  - 12:   **ende falls**
  - 13:   **falls**  $[\mathbf{p}_{x,0}^k, \mathbf{p}_{t,0}^k]^\top = \mathbf{0}$  **oder**  $\mathbf{p}^k = \mathbf{0}$  **dann**
  - 14:     **falls**  $\boldsymbol{\mu}^k \geq \mathbf{0}$  **dann**
  - 15:       **falls**  $t^k = 0$  **dann**
  - 16:         Stopp, mit  $\mathbf{x}^* \leftarrow \mathbf{x}^k$  ist optimal,  $W^* \leftarrow W^k$  ist aktive Menge in  $\mathbf{x}^*$
  - 17:       **sonst** /\*  $t^k > 0$  \*/
  - 18:         Stopp ohne optimale Lösung, Problem ist unzulässig
  - 19:       **ende falls**
  - 20:     **sonst** /\*  $\boldsymbol{\mu}^k \not\geq \mathbf{0}$  \*/
  - 21:       bestimme  $i^k \leftarrow \arg \min \{\mu_i^k < 0 \mid i \in W^k\}$
  - 22:       setze  $\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow \mathbf{x}^k$ ,  $t^{k+1} \leftarrow t^k$  und  $W^{k+1} \leftarrow W^k \setminus i^k$
  - 23:     **ende falls**
  - 24:   **sonst** /\*  $[\mathbf{p}_{x,0}^k, \mathbf{p}_{t,0}^k]^\top \neq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{p}^k \neq \mathbf{0}$  \*/
  - 25:     **falls**  $t^k > 0$  **dann**
  - 26:       bestimme  $\alpha_0^k$  und  $i^k$  mit Gl. (3.65)
  - 27:       setze  $\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow \mathbf{x}^k + \alpha_0^k \mathbf{p}_{t,0}^k$ ,  $t^{k+1} \leftarrow t^k + \alpha_0^k \mathbf{p}_{t,0}^k$
  - 28:     **sonst** /\*  $t^k = 0$  \*/
  - 29:       bestimme  $\alpha^k$  und  $i^k$  mit Gl. (3.26)
  - 30:       setze  $\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{p}^k$
  - 31:     **ende falls**
  - 32:     **falls** ( $t^k > 0$  und  $\alpha_0^k < \infty$  und  $\alpha_0^k \neq \alpha_t^k$ ) **oder**  $\alpha^k < 1$  **dann**
  - 33:       setze  $W^{k+1} \leftarrow W^k \cup i^k$
  - 34:     **sonst**
  - 35:       setze  $W^{k+1} \leftarrow W^k$
  - 36:     **ende falls**
  - 37:   **ende falls**
  - 38: **ende für**
-



## 4 Anwendungsbeispiel 1: Serielle redundante Roboter

Bereits seit Jahrzehnten stellen serielle Roboter in der industriellen Serienproduktion effiziente Werkzeuge zur flexiblen und gleichzeitig kostengünstigen Produktion dar. Klassische Industrieroboter werden dabei einmal für eine Aufgabe programmiert und arbeiten diese dann ohne weitere Bedienereingaben zur Laufzeit ab. Derzeit konzentriert sich die Forschung in zunehmendem Maße auf die Interaktion zwischen Roboter und Bediener. Neben einer Flexibilisierung bestehender Prozesse, z.B. in der Fertigung, können durch interaktive Robotersysteme auch neue Anwendungsbereiche z.B. in der Medizintechnik erschlossen werden.

In anspruchsvollen Anwendungsfeldern haben besonders kinematisch redundante Roboter eine hohe praktische Relevanz. Ein wesentlicher Vorteil von redundanten gegenüber nicht-redundanten Robotern liegt in der Verfügbarkeit einer größeren Anzahl von Gelenkfreiheitsgraden als für die eigentliche Aufgabenstellung erforderlich ist, so dass Nebenbedingungen, wie beispielsweise das Vermeiden von Kollisionen im Arbeitsraum, ohne Beeinträchtigung der Hauptaufgabe erfüllt werden können. Durch die systemimmanente Mehrdeutigkeit der Lösung der inversen Kinematik gestaltet sich die Interaktion mit dem Bediener bei zunehmender Redundanz jedoch als besonders anspruchsvoll.

### 4.1 Beispiele für serielle Großmanipulatoren

Autobetonpumpen sind Handhabungsgeräte, die bei der Betonierung von Bauwerken wie Gebäuden und Brücken ihren Einsatz finden. Eine auf dem LKW montierte Pumpe fördert den flüssigen Beton durch Rohrleitungen, die an einem Knick- bzw. Verteilmast verbaut sind. Durch einen flexiblen Schlauch an der Mastspitze wird der Beton über die zu betonierende Fläche verteilt. Vier ausfahrbare bzw. ausklappbare Stützen sorgen für die Stabilität der Autobetonpumpe während des Betoniervorgangs. Ausgestreckt kann ein Verteilmast eine Gesamtlänge von über 60 m erreichen (siehe Abb. 1.1).

Ein Verteilmast besteht in der Regel aus drei bis fünf Armsegmenten<sup>1</sup>. Die Armsegmente sind durch Drehgelenke mit horizontal und parallel angeordneten Drehachsen miteinander verbunden. Die aus dieser Anordnung resultierende kinematische

---

<sup>1</sup>Sechs bis siebenarmige Verteilmasten bilden hier die Ausnahme.

Redundanz ermöglicht eine höhere Beweglichkeit, so dass Hindernissen im Arbeitsraum gezielt ausgewichen werden kann. Der Mast ist in seiner Basis durch das sogenannte Drehwerk – ein zusätzliches Drehgelenk mit einer vertikalen Drehachse – gelagert, damit räumliche Bewegungen der Mastspitze möglich sind. Die schweren Armsegmente werden einzeln hydraulisch bewegt, indem ein Umlenkmechanismus die translatorische Bewegung des Hydraulikzylinders in rotatorische Bewegung des Armsegments umwandelt. Je nach Art des Umlenkmechanismus sind Schwenkwinkelbereiche von bis zu  $270^\circ$  möglich.

Das Führen der Mastspitze ist eine komplexe Positionieraufgabe, da der Bediener bzw. Maschinist jeden Arm einzeln steuern muss. Des Weiteren kann der Mast wegen der schlanken Konstruktion der Auslegerarme leicht zum Schwingen angeregt werden. Dies wird zum einen durch das Fahren einzelner Arme als auch durch die Betonpumpe selbst hervorgerufen: Aus technischen Gründen kann die Pumpe keinen konstanten Betonstrom liefern. Der diskontinuierliche Betonstrom regt somit den gesamten Verteilmast zum Schwingen an, wodurch an der Mastspitze große Schwingungsamplituden entstehen können (Schneider 1999). Diese unerwünschten Schwingungen können für die Arbeiter, die in der Nähe des Endschlauchs den Beton verteilen, eine Gefahr darstellen. Die Entwicklung von Assistenzsystemen, welche dem Maschinisten das Führen der Mastspitze erleichtern, ist aus diesem Grunde wünschenswert.

In den Jahren 1998 bis 2003 wurde an der Universität Duisburg-Essen (zu dem Zeitpunkt noch Gerhard-Mercator-Universität Duisburg) der Sonderforschungsbereich SFB 291 „Elastische Handhabungssysteme für schwere Lasten in komplexen Operationsbereichen“ gefördert, in dem gezielt die Erforschung von Schwerlastmanipulatoren, wie den vorab erwähnten Autobetonpumpen, vorangetrieben wurde. Viele Arbeiten legten den Schwerpunkt auf die Modellbildung und Simulation (Schneider 1999), während andere sich auf die Bahnplanung konzentrieren (Kleutges 1999; Buschmann 1999; Komainda 2003) und wieder andere auf die Regelung von Großmanipulatoren (Nissing 2002; Riege 2001).

## **4.2 Modellierung von seriellen Großmanipulatoren**

### **4.2.1 Grundlegende Definitionen**

Der folgende Abschnitt trägt zum Verständnis der Modellbildung bei und erklärt die wesentlichen Definitionen und Bezeichnungen.

## Bezugssysteme

Abb. 4.1 definiert die wichtigsten Bezugssysteme, die für die folgenden Abschnitte von Bedeutung sind. Der LKW bzw. Unterwagen wird praktisch immer etwas ge-

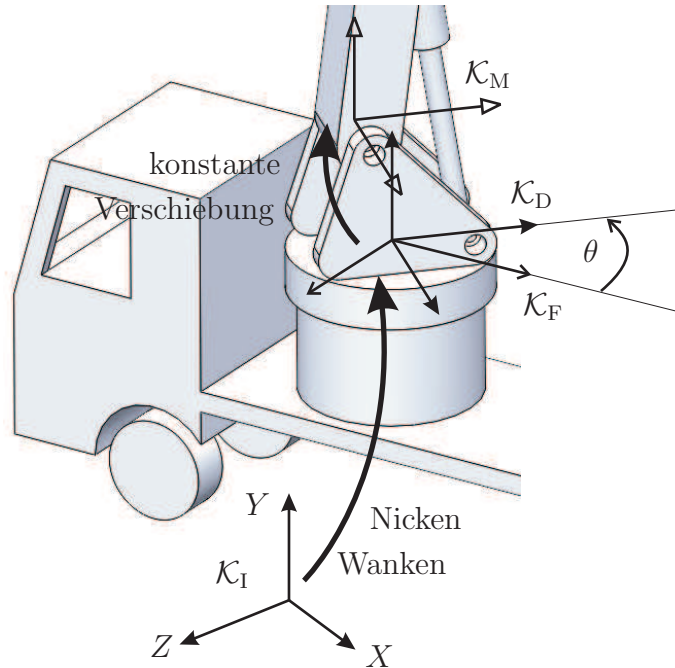


Abbildung 4.1: Definition der Bezugssysteme.

neigt abgestützt werden<sup>2</sup>. Da absolute Neigungswinkel der Armsegmente bezüglich der Horizontalen gemessen werden, wäre es erforderlich, am LKW einen 2D-Neigungssensor zu montieren, damit der Winkel des ersten Armsegments bezüglich des LKW ermittelt werden kann. Der 2D-Neigungssensor misst die Neigung des LKW bezüglich der horizontalen Ebene (Nicken und Wanken). Unter Umständen kann die Montage des  $xy$ -Neigungssensors entfallen, wenn die Fahrzeugneigung sehr gering ist. Dann gilt die Annahme, dass die Neigung des Fahrzeugs Null sei.

Ausgehend vom ortsfesten Inertialsystem  $\mathcal{K}_I$  gelangt man durch Nicken (Drehung um die Fahrzeug-Querachse) und Wanken (Drehung um die Fahrzeug-Längsachse) ins fahrzeugfeste Koordinatensystem  $\mathcal{K}_F$ . Das Gieren des Fahrzeugs bzw. des LKW (Drehung um die Hochachse) ist hier Null und wird nicht berücksichtigt. Über den Drehwerk-Winkel  $\theta$  gelangt man von  $\mathcal{K}_F$  ins Koordinatensystem  $\mathcal{K}_D$  des Drehwerks und von dort über eine konstante Verschiebung ins Koordinatensystem  $\mathcal{K}_M$  im ersten Gelenk des Masts.

<sup>2</sup>maximal  $5^\circ$  von der Lotrechten sind erlaubt. Mittels einer im LKW montierten Wasserwaage hat der Maschinist für die Einhaltung der Grenze Sorge zu tragen.

### Nullkonfiguration des Masts

Die Konzeption von Assistenzsystemen für serielle Großmanipulatoren setzt die Kenntnis der aktuellen Mastkonfiguration, d.h. der relativen Lage der einzelnen Armsegmente zueinander, voraus. Konkret müssen die Gelenkwinkel, also der Winkel zwischen zwei benachbarten Armen, bekannt sein, wobei bei  $n$  Armsegmenten auch  $n$  Gelenkwinkel benötigt werden.

Bei der Messung der aktuellen Mastkonfiguration können beispielsweise Neigungssensoren verwendet werden. Wird ein Neigungssensor an ein Armsegment montiert, liefert er den absoluten Neigungswinkel des Armsegments bezüglich der Horizontalen.

Zunächst wird die Nulllage des Verteilermasts festgelegt, die „nach rechts“ und „waagrecht“ angeordnet ist (Abb. 4.2). Werden Neigungssensoren zur Ermittlung der

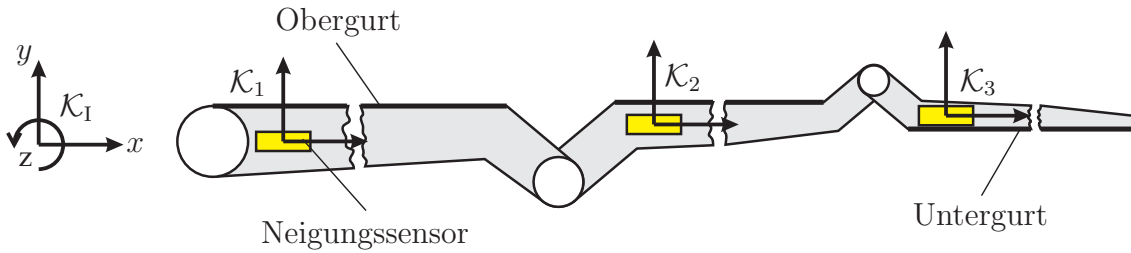


Abbildung 4.2: Definition der Nullkonfiguration anhand der horizontalen Neigung von Ober- und Untergurt des jeweiligen Arms bezüglich des inertialen Koordinatensystems  $\mathcal{K}_1$ . Der Mast ist dabei nach rechts ausgerichtet. Die Ausrichtung des Neigungssensors zur Messung der Armeigung orientiert sich am Ober- bzw. Untergurt des Arms. Eine Alternative ist die Nullkonfiguration, bei der sämtliche Armgelenke auf einer horizontalen Linie angeordnet sind.

Konfiguration des Masts verwendet, so beschreibt Abb. 4.2 eine mögliche Montageanordnung.

### Zusammenhang zwischen Gelenk- und Neigungswinkeln

Im Folgenden wird der wichtige Zusammenhang zwischen dem Gelenkwinkel  $\gamma_i$  und Neigungswinkel  $\varphi_i$  näher erläutert und in Abb. 4.3 dargestellt. Daraus wird ersichtlich, dass bei Vorgabe der Neigungswinkel  $\varphi_i$  gilt

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \varphi_1 - \alpha \\ \gamma_i &= \varphi_i - \varphi_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned} \tag{4.1}$$

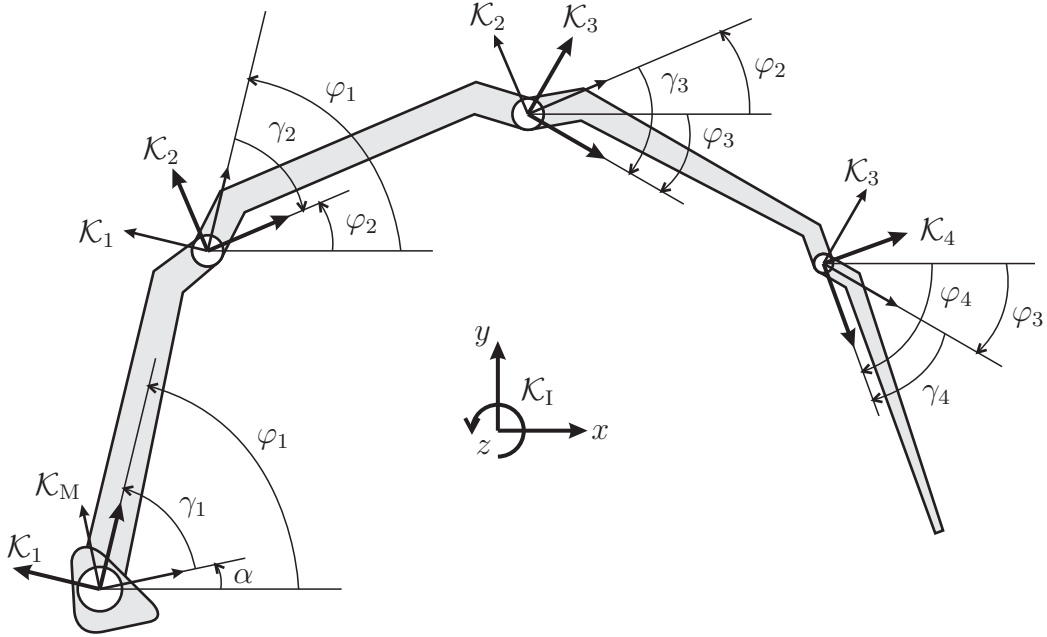


Abbildung 4.3: Zusammenhang zwischen Neigungs- und Gelenkwinkeln.

wobei  $\alpha$  der Neigungswinkel des Drehschemels in der  $xy$ -Manipulatorebene ist. In den folgenden Abschnitten wird der Vektor der Gelenkwinkel  $\gamma$  definiert als

$$\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]^\top, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Bei Vorgabe der Gelenkwinkel  $\gamma_i$  ergeben sich die Neigungswinkel  $\varphi_i$  durch Umformen von Gl. (4.1) zu

$$\varphi_i = \alpha + \sum_{k=1}^i \gamma_k, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

und mit Gl. (4.3)

$$\varrho_i := \varphi_i - \alpha = \sum_{k=1}^i \gamma_k, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

mit dem entsprechenden Vektor

$$\varrho = [\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n]^\top. \quad (4.5)$$

### Armgeometrie

Für die Kinematik sind die Geometriedaten der einzelnen Ausleger wichtig. Diese werden im Allgemeinen aus Konstruktionsdaten entnommen und können als dreidimensionale Vektoren  ${}^i\mathbf{a}_i = [a_{x,i}, a_{y,i}, a_{z,i}]^\top$  – dargestellt im körperfesten Koordinatensystem  $\mathcal{K}_i$  des entsprechenden Arms  $i$  – abgelegt werden (Abb. 4.4, oben).

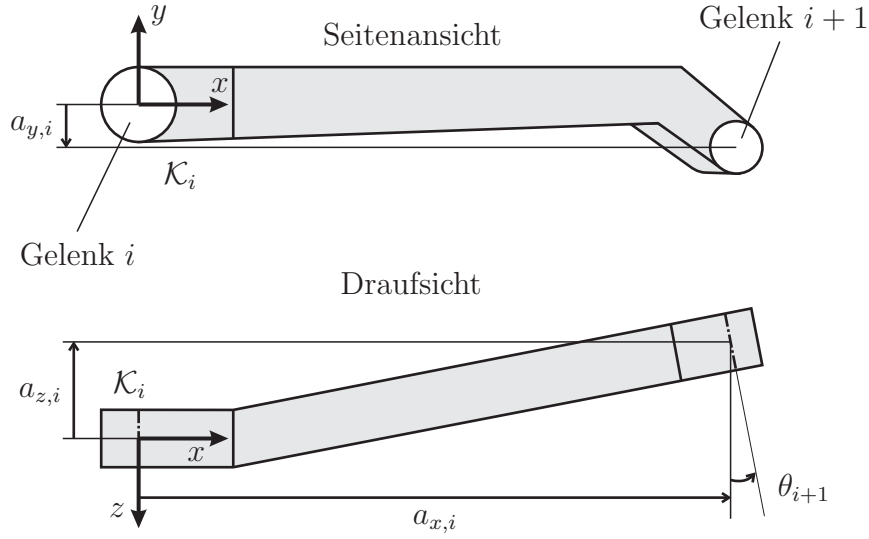


Abbildung 4.4: Definition des Vektors  ${}^i\mathbf{a}_i = [a_{x,i}, a_{y,i}, a_{z,i}]^\top$  von Gelenk  $i$  nach Gelenk  $i+1$  und des Winkelversatzes  $\theta_{i+1}$  am Gelenk  $i+1$  bezüglich des körperfesten Koordinatensystems  $\mathcal{K}_i$ .

Des Weiteren wird für jeden Arm  $i$  der Winkelversatz  $\theta_{i+1}$  um die  $y$ -Achse bezüglich des Koordinatensystems  $\mathcal{K}_i$  definiert (Abb. 4.4, unten). Dabei ist der Vektor aller Winkelversätze definiert als

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^\top. \quad (4.6)$$

### Gelenkendlagen und Ausfaltrichtung

Für eine funktionierende inverse Kinematik ist die Kenntnis der einzelnen Schwenkwinkelbereiche erforderlich, denn nur Gelenkbewegungen innerhalb der minimalen und maximalen Gelenkendlagen  $\gamma_{i,\min}$  und  $\gamma_{i,\max}$  sind technisch möglich. Diese werden im Parametersatz festgelegt.

Allerdings werden seitens der Maschinenhersteller andere minimale und maximale Gelenkendlagen  $\bar{\gamma}_{i,\min}$  und  $\bar{\gamma}_{i,\max}$  definiert, wobei  $\bar{\gamma}_{i,\min}$  immer der Gelenkwinkel im eingefalteten und  $\bar{\gamma}_{i,\max}$  im ausgefalteten Zustand ist. Damit gilt stets  $\bar{\gamma}_{i,\min} < \bar{\gamma}_{i,\max}$ . Um den Zusammenhang zu  $\gamma_{i,\min}$  und  $\gamma_{i,\max}$  herzustellen ist folglich die Kenntnis über die Ausfaltrichtung eines jeden Armsegments erforderlich (Abb. 4.5). Ausgehend von der Nullkonfiguration des Masts wird die Ausfaltrichtung von Arm  $i$  dadurch definiert, ob sich dieser im eingefalteten Zustand *unter* oder *auf* dem vorigen Arm  $i-1$  befindet. Dementsprechend ergibt sich eine andere gleichwertige

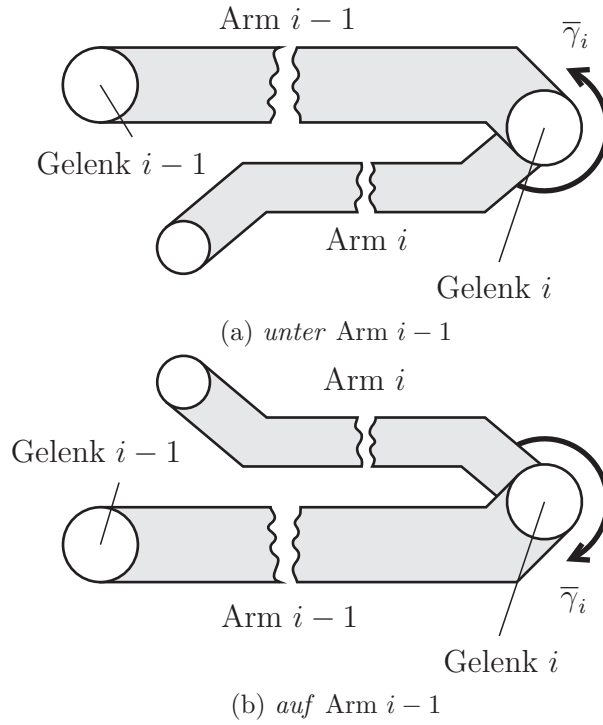


Abbildung 4.5: Definition der Ausfaltrichtung aus der Nullkonfiguration des Masts anhand der Lage des Arms  $i$  im eingefalteten Zustand *unter* oder *auf* dem vorigen Arm  $i-1$ . Andere mögliche Definition: in der Nullkonfiguration des Masts faltet sich der Arm *gegen* oder *im* Uhrzeigersinn aus.

Definition, bei der geprüft wird, ob sich Arm  $i$  *gegen* oder *im Uhrzeigersinn* ausfaltet.

Der konkrete Zusammenhang zwischen den Gelenkwinkeln  $\gamma_i$  und  $\bar{\gamma}_i$  wird in Abb. 4.6 erklärt. Es ergibt sich zunächst, dass

$$\gamma_i = \begin{cases} \bar{\gamma}_i - \pi & \begin{array}{l} \text{Arm } i \text{ liegt } \textit{unter} \text{ Arm } i-1 \text{ bzw.} \\ \text{Arm } i \text{ öffnet } \textit{gegen} \text{ Uhrzeigersinn} \end{array} \\ -(\bar{\gamma}_i - \pi) & \begin{array}{l} \text{Arm } i \text{ liegt } \textit{auf} \text{ Arm } i-1 \text{ bzw.} \\ \text{Arm } i \text{ öffnet } \textit{im} \text{ Uhrzeigersinn} \end{array} \end{cases}, \quad (4.7)$$

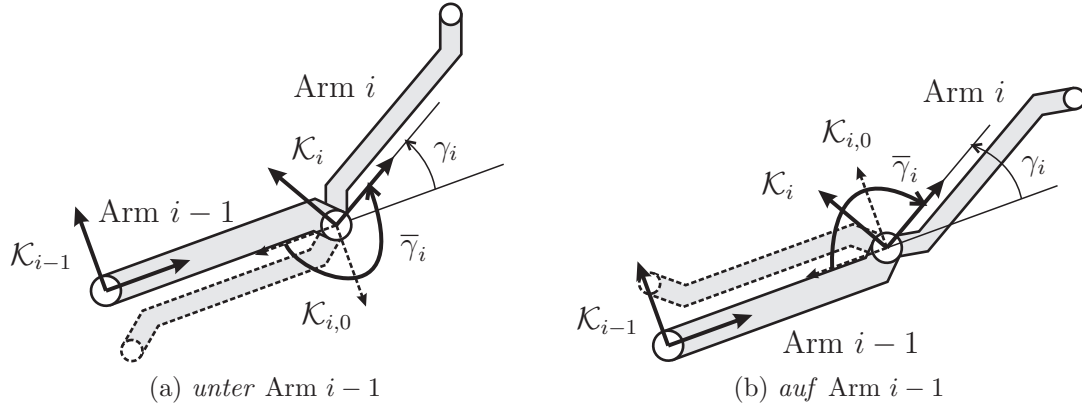


Abbildung 4.6: Zusammenhang zwischen den Gelenkwinkeln  $\gamma_i$  und  $\bar{\gamma}_i$ .

und damit gilt für die vorgegebenen Endanschläge  $\bar{\gamma}_{i,\min}$  und  $\bar{\gamma}_{i,\max}$

$$\gamma_{i,\min/\max} = \begin{cases} \bar{\gamma}_{i,\min/\max} - \pi & \begin{array}{l} \text{Arm } i \text{ liegt unter Arm } i-1 \text{ bzw.} \\ \text{Arm } i \text{ öffnet gegen Uhrzeigersinn} \end{array} \\ -(\bar{\gamma}_{i,\min/\max} - \pi) & \begin{array}{l} \text{Arm } i \text{ liegt auf Arm } i-1 \text{ bzw.} \\ \text{Arm } i \text{ öffnet im Uhrzeigersinn} \end{array} \end{cases} . \quad (4.8)$$

#### 4.2.2 Vorwärtskinematik

##### Translation

Kinematisch handelt es sich bei den betrachteten Verteilermasten um ebene, redundante Manipulatoren, da die Arme durch Drehgelenke mit horizontal parallel angeordneten Drehachsen miteinander verbunden sind. Um eine räumliche Bewegung zu gewährleisten, befindet sich in der Basis des Manipulators ein Drehgelenk mit vertikaler Drehachse. Die inverse Kinematik soll gemäß Abb. 4.29b als zylindrische Einhebelsteuerung realisiert werden und setzt zunächst die Aufstellung der Vorwärtskinematik voraus. Entsprechend Abb. 4.7 bietet sich die Darstellung der Vorwärtskinematik des Endeffektors in Zylinderkoordinaten an. Daraus wird ersichtlich, dass

$$\bar{\mathbf{r}}_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\theta}) = \bar{\mathbf{r}}_{\text{TCP}}(\mathbf{r}_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\theta}) . \quad (4.9)$$



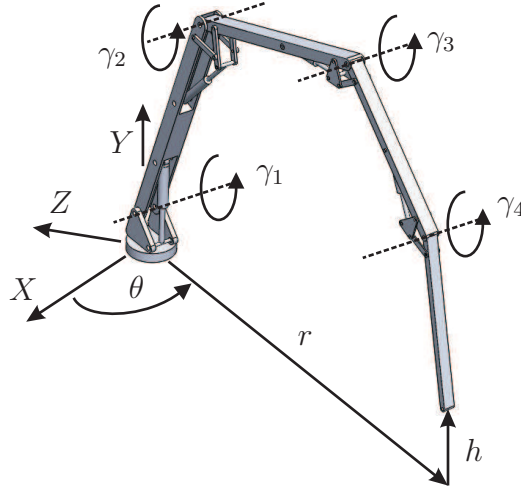


Abbildung 4.7: Definition der Zylinderkoordinaten.

Dabei wird die in Zylinderkoordinaten vorgegebene Vorwärtskinematik der Position des Endeffektors  $\mathbf{r}_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\gamma})$  aus den variablen Gelenkwinkeln der Armsegmente  $\boldsymbol{\gamma}$  ermittelt, in der die Drehung des Drehschemels  $\theta$  nicht in die Vorwärtskinematik und damit auch nicht in die inverse Kinematik einfließt<sup>3</sup>.

Die Position des Endeffektors ergibt sich zunächst aus der Summe der  $n$  Arm-Vektoren  $\mathbf{a}_i, i = 1, \dots, n$  von Gelenkpunkt zu Gelenkpunkt zu

$$\mathbf{r}_{\text{TCP}}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i. \quad (4.10)$$

In Komponentenschreibweise ergibt sich, dass

$$\mathbf{r}_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{i=1}^n \left[ \left( \prod_{k=0}^{i-1} {}^{k-1}\mathbf{R}_k(\theta_k, \gamma_k) \right)^i \mathbf{a}_i \right], \quad (4.11)$$

wobei nun erkennbar ist, dass die Position des Endeffektors abhängig vom konstanten Winkelversatz  $\boldsymbol{\theta}$  und den variablen Gelenkwinkeln  $\boldsymbol{\gamma}$  ist<sup>4</sup>. Beispielhaft für einen vierarmigen Manipulator lautet die Formel ausgeschrieben

$$\mathbf{r}_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}) = {}^0\mathbf{R}_1^1 \mathbf{a}_1 + {}^0\mathbf{R}_1^1 \mathbf{R}_2^2 \mathbf{a}_2 + {}^0\mathbf{R}_1^1 \mathbf{R}_2^2 \mathbf{R}_3^3 \mathbf{a}_3 + {}^0\mathbf{R}_1^1 \mathbf{R}_2^2 \mathbf{R}_3^3 \mathbf{R}_4^4 \mathbf{a}_4 \quad (4.12)$$

mit der Abkürzung  ${}^{k-1}\mathbf{R}_k := {}^{k-1}\mathbf{R}_k(\theta_k, \gamma_k)$  aus Gründen der Übersichtlichkeit.

<sup>3</sup>Die Vorwärtskinematik der Orientierung (des letzten Arms)  $\mathbf{w}_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\gamma})$  wird im folgenden Abschnitt berücksichtigt.

<sup>4</sup>Der Skalar  $\theta$  ist der variable Drehwinkel des Drehschemels, während der Vektor  $\boldsymbol{\theta}$  die konstante, d. h. konstruktive Winkelverdrehung der Gelenke  $\boldsymbol{\gamma}$  angibt, siehe auch Gl. (4.6) und Abb. 4.4.

Hier ist erkennbar, dass eine rekursive Darstellung möglich ist. Durch Ausklammern der jeweils vorangehenden Matrixmultiplikation lässt sich, bezogen auf das Beispiel, die rekursive (und kompaktere) Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{r}_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}) = {}^0\mathbf{R}_1 \left( {}^1\mathbf{a}_1 + {}^1\mathbf{R}_2 \left( {}^2\mathbf{a}_2 + {}^2\mathbf{R}_3 \left( {}^3\mathbf{a}_3 + {}^3\mathbf{R}_4 \cdot {}^4\mathbf{a}_4 \right) \right) \right) \quad (4.13)$$

ermitteln, welche im Vergleich zu Gl. (4.12) aufgrund der entfallenden Matrix-Matrix-Multiplikationen wesentlich effizienter ist.

Sämtliche Rotationsmatrizen  ${}^{k-1}\mathbf{R}_k$  bestehen aus der Verknüpfung der elementaren Rotationsmatrizen

$$\mathbf{R}_y(\theta_k) = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & 0 & \sin \theta_k \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_k & 0 & \cos \theta_k \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

für die konstruktionsbedingte, d. h. konstante Verdrehung des Drehgelenks um die  $y$ -Achse und

$$\mathbf{R}_z(\gamma_k) = \begin{bmatrix} \cos \gamma_k & -\sin \gamma_k & 0 \\ \sin \gamma_k & \cos \gamma_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

für die Drehung des Gelenks selbst um seine  $z$ -Achse, so dass zum Schluss die Gesamrotation

$$\begin{aligned} {}^{k-1}\mathbf{R}_k &= \mathbf{R}_y(\theta_k) \mathbf{R}_z(\gamma_k) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_k & 0 & \sin \theta_k \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_k & 0 & \cos \theta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma_k & -\sin \gamma_k & 0 \\ \sin \gamma_k & \cos \gamma_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_k \cos \gamma_k & -\cos \theta_k \sin \gamma_k & \sin \theta_k \\ \sin \gamma_k & \cos \gamma_k & 0 \\ -\sin \theta_k \cos \gamma_k & \sin \theta_k \sin \gamma_k & \cos \theta_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.16)$$

eines Gelenks bestimmt werden kann.

Auch mit der rekursiven Berechnungsvorschrift für den Endeffektor ist dessen Berechnungsaufwand noch recht hoch. Da jedoch in der Regel die Verdrehwinkel  $\theta_k \ll 1$  sind, kann die Endeffektor-Berechnung durch Linearisierung von Gl. (4.11) um den Entwicklungspunkt  $\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{0}$  deutlich reduziert werden. Dabei wird der Gelenkwinkel  $\boldsymbol{\gamma}$  als konstant betrachtet und aus Gründen der Übersichtlichkeit  $\mathbf{r}_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\theta}) := \mathbf{r}_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma})$  definiert. Die Linearisierung erfolgt über die bekannte Taylor-Reihenentwicklung mit Abbruch nach der ersten Ordnung gemäß

$$\mathbf{r}_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\theta}) \approx \mathbf{r}_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\theta}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{r}_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}_0} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0). \quad (4.17)$$

Für die Realisierung der zylindrischen inversen Kinematik (siehe Abb. 4.29b) sind die Komponenten in der Manipulatorebene ( $xy$ -Ebene) von Bedeutung, die  $z$ -Komponente bleibt dabei unberücksichtigt. Im Folgenden ist daher der Vektor  $\mathbf{r}_{\text{TCP}}$  nur noch durch die  $xy$ -Komponenten definiert. Im nächsten Schritt ist es außerdem sinnvoll, die konstanten und variablen Terme aus Gl. (4.17) zu ordnen, um die Berechnung der Vorwärtskinematik zu beschleunigen. Dadurch vereinfacht sich die zweidimensionale Vorwärtskinematik der Position zu

$$\mathbf{r}_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\varrho}) = \begin{bmatrix} f_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \cos \varrho_i & -\sin \varrho_i \\ \sin \varrho_i & \cos \varrho_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

mit den den Neigungswinkeln  $\varrho_i$  aus Gl. (4.4) und den konstanten Parametern

$$f_i = \begin{cases} \theta_1 \sum_{k=1}^n a_{z,k} & \text{für } i = 0 \\ a_{x,i} + \theta_{i+1} \sum_{k=i+1}^n a_{z,k} & \text{für } i = 1, \dots, n \end{cases}, \quad (4.19)$$

$$g_i = a_{y,i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.20)$$

Die inverse Kinematik stellt auf Positionsebene ein hochgradig nichtlineares Problem dar, siehe dazu Schneider (1999). Aus diesem Grund soll sie auf Geschwindigkeitsebene gelöst werden, da hier (und auch auf Beschleunigungsebene) lineare Zusammenhänge existieren, die einfacher zu handhaben sind. Dies setzt die Vorwärtskinematik auf Geschwindigkeitsebene voraus, welche lautet

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\varrho}) = \frac{\partial \mathbf{r}_{\text{TCP}}}{\partial \boldsymbol{\varrho}} \dot{\boldsymbol{\varrho}} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\text{TCP}}}{\partial \boldsymbol{\varrho}} \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial \boldsymbol{\varphi}}}_{\mathbf{E}_{n \times n}} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\text{TCP}}}{\partial \boldsymbol{\varrho}} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \tilde{\mathbf{J}}_{\text{TCP}} \dot{\boldsymbol{\varphi}} \quad (4.21)$$

mit der  $n \times n$ -Einheitsmatrix  $\mathbf{E}_{n \times n}$ , die sich aus der partiellen Ableitung von Gl. (4.4) nach  $\boldsymbol{\varphi}$  ergibt und der  $i$ ten Spalte der JACOBI-Matrix

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\text{TCP},i}(\boldsymbol{\varrho}) = \begin{bmatrix} -\sin \varrho_i & -\cos \varrho_i \\ \cos \varrho_i & -\sin \varrho_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.22)$$

Im Folgenden ist es sinnvoll,  $\dot{\mathbf{r}}_{\text{TCP}}$  nicht in Abhängigkeit von  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$  aufzustellen, sondern vom Vektor der Gelenkwinkel  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ , während die JACOBI-Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}_{\text{TCP},i}$  weiterhin von  $\boldsymbol{\varrho}$  abhängig bleiben soll. Dazu wird Gl. (4.21) erweitert, so dass

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\varrho}) = \tilde{\mathbf{J}}_{\text{TCP}} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \underbrace{\tilde{\mathbf{J}}_{\text{TCP}} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}}_{\mathbf{J}_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\varrho})} \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{J}_{\text{TCP}} \dot{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (4.23)$$

wobei  $\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}$  durch partielle Ableitung von Gl. (4.3) eine untere quadratische  $n \times n$ -Dreiecksmatrix der Form

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

ergibt. Aus Gl. (4.23) ergibt die  $i$ te Spalte der JACOBI-Matrix schließlich

$$\mathbf{J}_{\text{TCP},i}(\boldsymbol{\varrho}) = \sum_{k=1}^{n+1-i} \begin{bmatrix} -\sin \varrho_k & -\cos \varrho_k \\ \cos \varrho_k & -\sin \varrho_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_k \\ g_k \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.25)$$

## Rotation

Die Herleitung der Vorwärtskinematik der Rotation gestaltet sich einfacher. Aus Gl. (4.3) ergibt sich speziell für die Orientierung bzw. Neigung des letzten Armsegments

$$w_{\text{TCP}}(\boldsymbol{\gamma}) = \varphi_n = \alpha + \sum_{i=1}^n \gamma_i \quad (4.26)$$

und damit

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_n &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \dot{\boldsymbol{\gamma}} \\ &= \mathbf{J}_{\text{TCP,rot}} \dot{\boldsymbol{\gamma}} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{n\text{-mal}} \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

### 4.2.3 Umlenkmechanismen der hydraulischen Antriebe

Aufgrund der großen auftretenden Kräfte und Momente durch die Armsegmente werden bei den Großmanipulatoren hydraulische Linearantriebe (Hydraulikzylinder) eingesetzt. Mittels eines ebenen Umlenkmechanismus wird die lineare Hubbewegung des Zylinders in rotatorische Bewegung des Auslegerarms transformiert, wobei ein nichtlineares Übertragungsverhalten entsteht. Bei den hier betrachteten Großmanipulatoren kommen drei verschiedene Umlenkmechanismen zum Einsatz, die im Folgenden näher erläutert werden sollen (Abb. 4.8). Der Umlenkmechanismus vom Typ 1 in Abb. 4.8a ist ein einfacher Kniehebelmechanismus und wird grundsätzlich

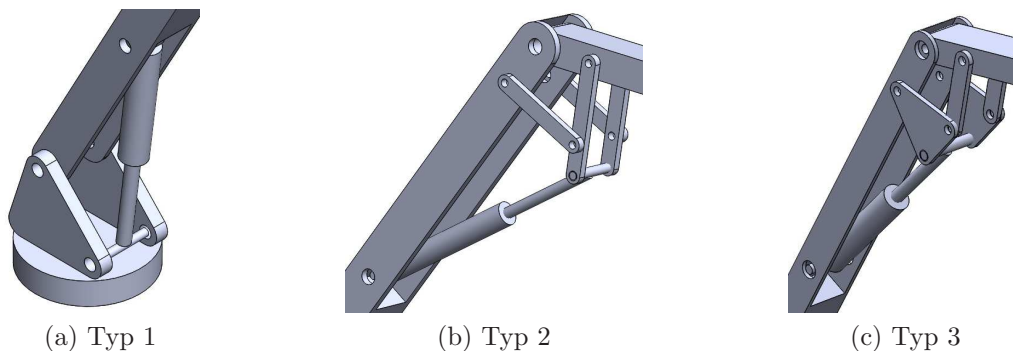


Abbildung 4.8: Die drei Typen von Umlenkmechanismen. Typ 1: Kniehebelmechanismus, Typ 2: STEPHENSON-Mechanismus, Typ 3: WATT-Mechanismus.

für den Antrieb des ersten Auslegerarms eingesetzt, wenn ein Schwenkwinkelbereich bis zu etwa  $100^\circ$  ausreichend ist. Die Umlenkmechanismen vom Typ 2 (Abb. 4.8b) und Typ 3 (Abb. 4.8c) – auch bekannt als STEPHENSONsche und WATTsche Kette, siehe Schneider (1999) und Engeln (1995) – werden trotz ihrer komplexeren Kinetik sehr häufig eingesetzt, da sie Schwenkwinkelbereiche bis  $270^\circ$  ermöglichen.

### Umlenkmechanismus vom Typ 1

Abb. 4.9 stellt den einfachen Kniehebelmechanismus dar. Zum besseren Verständnis

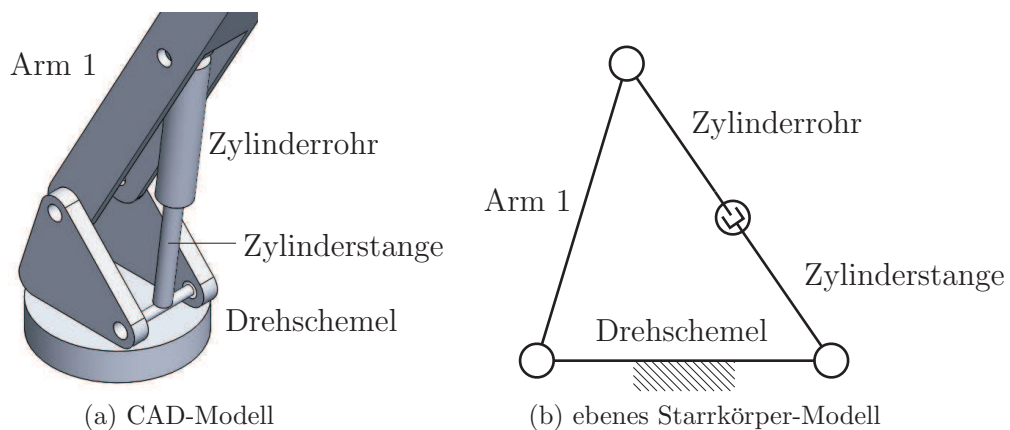


Abbildung 4.9: Umlenkmechanismus vom Typ 1.

der kinematischen Analyse wird die entsprechende topologische Struktur des ebenen Mechanismus gemäß Abb. 4.10 betrachtet.

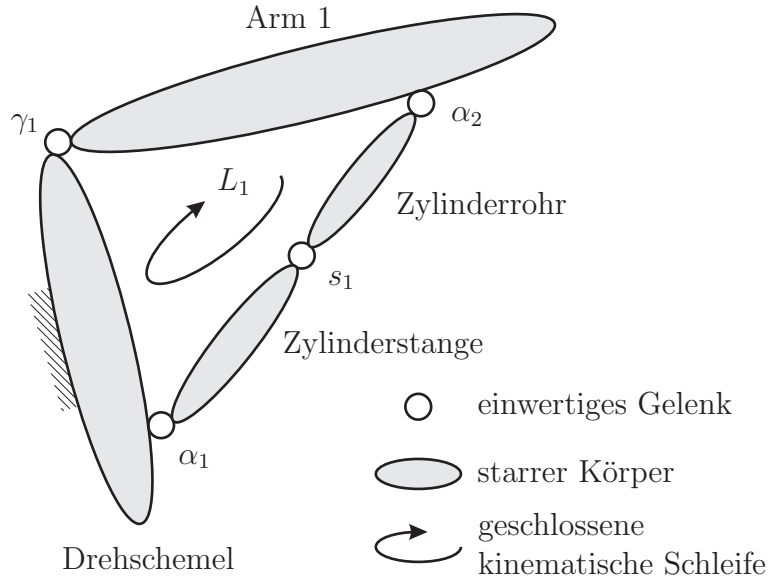


Abbildung 4.10: Topologie der Umlenkkinematik vom Typ 1.

Zunächst lässt sich die Anzahl der Freiheitsgrade bestimmen. Für die Anzahl der kinematischen Schleifen erhält man nach (Schramm u. a. 2010a, Seite 52)

$$n_L = n_G - n_B = 4 - 3 = 1, \quad (4.28)$$

mit

$n_B$  : Anzahl der starren Körper (ohne Grundkörper, hier Drehschemel),

$n_G$  : Anzahl der Gelenke,

$n_L$  : Anzahl der geschlossenen kinematischen Schleifen.

Das GRÜBLER-KUTZBACH-Kriterium für ebene Mechanismen (siehe Schramm u. a. 2010a, Seite 60) liefert die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  des Mechanismus. Es gilt

$$f = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 3n_L = 4 - 3 = 1 \quad (4.29)$$

mit

$f_{G_i}$  : Freiheitsgrad des Gelenks  $i$ .

Damit lässt sich der Mechanismus als Netz nichtlinearer kinematischer Transformatoren (Schramm u. a. 2010a; Hiller 1995; Hiller u. a. 1986) veranschaulichen, siehe

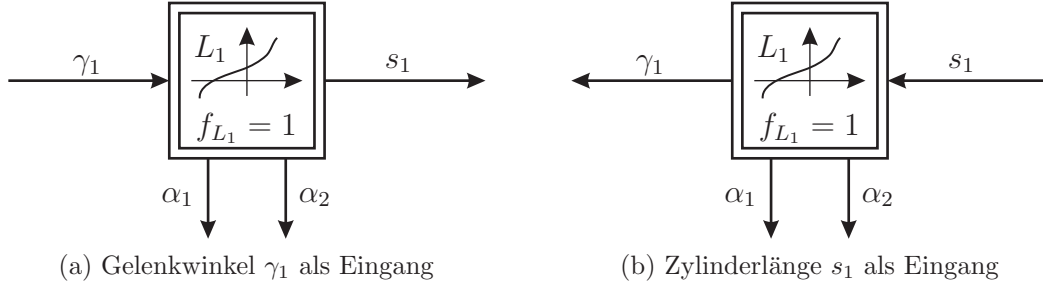


Abbildung 4.11: Kinematisches Netz der Umlenkkinematik vom Typ 1 mit verschiedenen Eingangsgrößen.

Abb. 4.11. Es ist erkennbar, dass bei Vorgabe eines beliebigen Gelenks, alle anderen Gelenkgrößen ermittelt werden können. Interessant ist hierbei die Vorgabe des Armgelenks  $\gamma_1$  (Abb. 4.11a) und des Zylinderhubs bzw. Zylinderlänge  $s_1$  (Abb. 4.11b) als Eingangsgröße des Umlenkmechanismus. Anhand der kinematischen Transformatoren ist es nun ersichtlich, dass unabhängig von der Eingangsgröße eine geschlossene Lösung des Übertragungsverhaltens existiert. Dies ist im Hinblick auf echtzeitfähige Anwendungen wie beispielsweise modellbasierte Regelung oder Echtzeit-Simulation des Großmanipulators von großer Bedeutung.

Gemäß Abb. 4.12 lautet die Bindungsgleichung

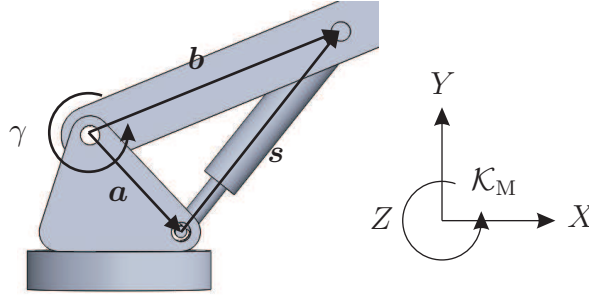


Abbildung 4.12: Vektordefinition beim Umlenkmechanismus Typ 1.

$$s^2 = \mathbf{s}^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{a})^2 \quad (4.30)$$

Mit den aus den Konstruktionsdaten bekannten körperfesten Vektoren der Anlenkpunkte  ${}^0\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]^\top$  und  ${}^1\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]^\top$  kann die Bindungsgleichung in Komponenten aufgestellt werden. Aus

$$s^2 = \mathbf{s}^2 = [{}^0\mathbf{R}_1(\gamma) {}^1\mathbf{b} - {}^0\mathbf{a}]^2 \quad (4.31)$$

mit

$${}^0\mathbf{R}_1(\gamma) = \mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

ergibt sich nach einigen Umformungen

$$s^2 = A \cos \gamma + B \sin \gamma + C \quad (4.33)$$

bzw.

$$s = \sqrt{A \cos \gamma + B \sin \gamma + C} \quad (4.34)$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= -2(a_x b_x + a_y b_y), \\ B &= 2(a_x b_y - a_y b_x), \\ C &= (a_x^2 + a_y^2) + (b_x^2 + b_y^2) + (a_z - b_z)^2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

### Umlenkmechanismus vom Typ 2

In Abb. 4.13 ist der Umlenkmechanismus der STEPHENSONSchen Kette dargestellt und in Abb. 4.14 die entsprechende topologische Darstellung.

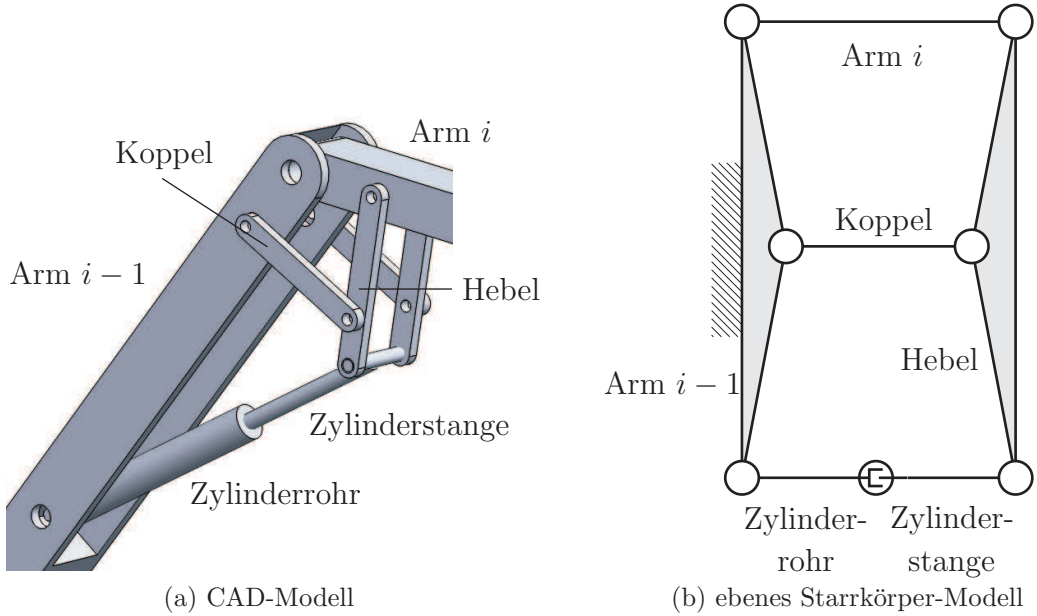
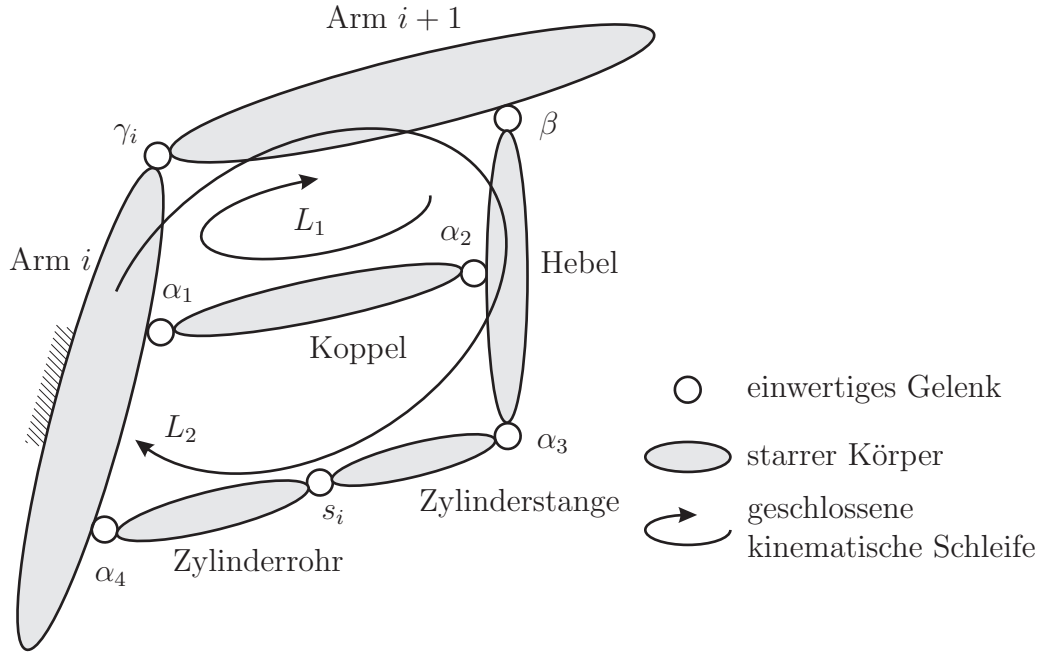


Abbildung 4.13: Umlenkmechanismus vom Typ 2.

Laut Abb. 4.14 beträgt die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  mit dem GRÜBLER-KUTZBACH-Kriterium für ebene Mechanismen

$$f = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 3 n_L = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 7 - 6 = 1. \quad (4.36)$$



Abbildung 4.14: Topologie der Umlenkkinematik  $i$  vom Typ 2.

Anschließend gilt es nun, die Kopplung zwischen den beiden Schleifen mit Hilfe der kinematischen Transformatoren Schramm u. a. (2010a); Hiller (1997) darzustellen. Dazu muss der lokale Schleifenfreiheitsgrad einer jeden Schleife bestimmt werden. Hier gilt für die Schleife  $L_1$

$$\begin{aligned}
 n_{L_1} &= n_{G_1} - n_{B_1} = 4 - 3 = 1 \\
 \Rightarrow f_{L_1} &= \sum_{i=1}^{n_{G_1}} f_{G_i} - 3 n_{L_1} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

und entsprechend für die Schleife  $L_2$

$$\begin{aligned}
 n_{L_2} &= n_{G_2} - n_{B_2} = 4 - 3 = 1 \\
 \Rightarrow f_{L_2} &= \sum_{i=1}^{n_{G_2}} f_{G_i} - 3 n_{L_2} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 5 - 3 = 2.
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Aus den Ergebnissen der Gleichungen (4.29), (4.37) und (4.38) wird ersichtlich, dass zum analytischen Lösen dieses Mechanismus die Wahl des Freiheitsgrads bzw. der Eingangsvariablen nicht willkürlich ist. Dies verdeutlicht die Darstellung des Mechanismus als Netz kinematischer Transformatoren in Bild 4.15. Bei der Wahl des Winkels  $\gamma_i$  als Eingangsvariable lässt sich der Mechanismus geschlossen lösen. Zuerst wird die Lösung der Schleife  $L_1$  bestimmt, so dass die Winkel  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  ermittelt werden können. Gemäß Bild 4.15a ist erkennbar, dass  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  über die

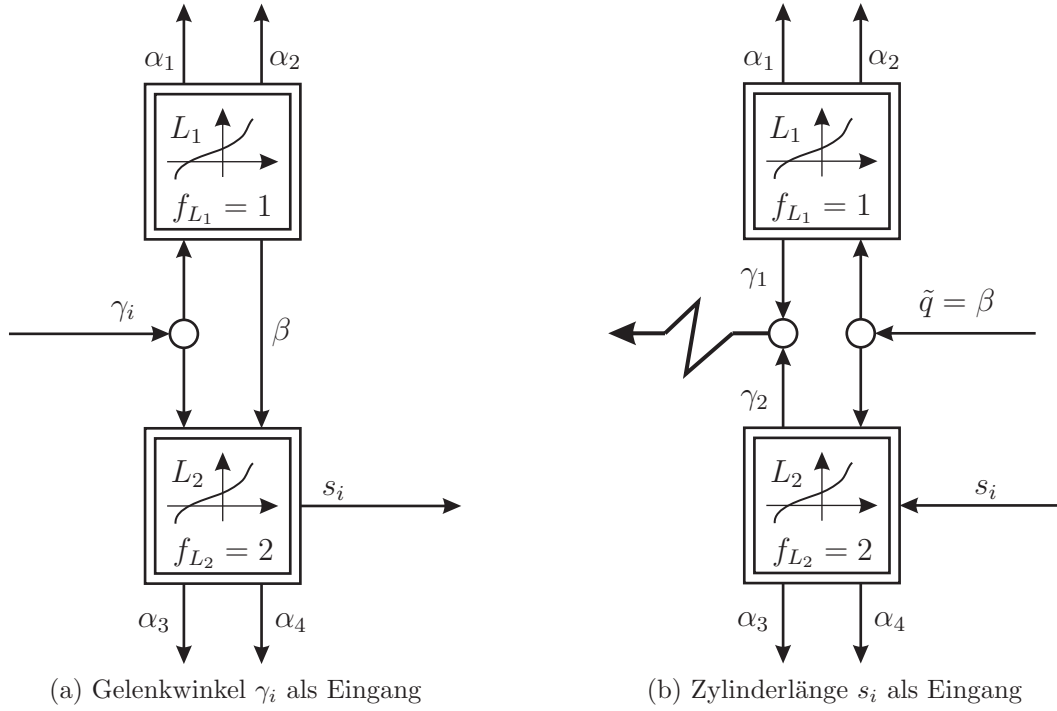


Abbildung 4.15: Kinematisches Netz der Umlenkinematik vom Typ 2.

Koppel mit der Schleife  $L_2$  zusammenhängen und damit die Eingangsvariablen von  $L_2$  darstellen. Die Bestimmung des Zylinderhubs  $s$  ist nun möglich.

Andererseits scheint die Wahl des Zylinderhubs  $s$  als Eingangsvariable sinnvoll, da die Bewegung des Mastarms über den Zylinder erfolgt. Diese Vorgehensweise lässt sich nicht geschlossen lösen, wie aus Bild 4.15b erkennbar ist. Hierbei ist die Einführung einer Pseudo-Eingangsvariablen wie beispielsweise  $\alpha_1$  erforderlich, da zum Lösen der Schleife  $L_1$  neben  $s$  eine zweite Eingangsgröße benötigt wird. Die Einführung dieser Pseudovariablen ruft außerdem eine impliziten Gleichung hervor. In diesem Fall muss  $\alpha_1$  solange iteriert werden, bis die Werte  $\alpha_2$  aus beiden Schleifen identisch sind bzw. deren absolute Differenz ein  $\epsilon$  unterschreitet:

$$|\alpha_{2,L_1} - \alpha_{2,L_2}| \leq \epsilon \quad (4.39)$$

Nach Abb. 4.16a lautet der Vektorzug für die Schleife  $L_1$

$$\mathbf{d} = \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a} \quad (4.40)$$

Durch Quadrieren ergibt sich

$$\mathbf{d}^2 = (\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a})^2 \quad (4.41)$$

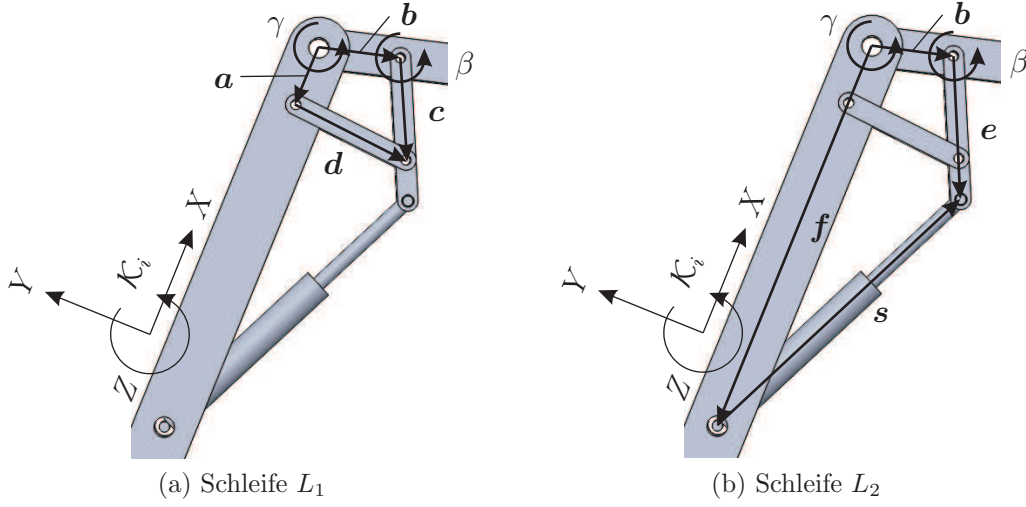


Abbildung 4.16: Definition der Vektoren des Umlenkmechanismus Typ 2.

und in Komponenten entsprechend

$$({}^i \mathbf{d})^2 = ({}^i \mathbf{R}_1(\gamma) {}^1 \mathbf{b} + {}^i \mathbf{R}_2(\beta) {}^2 \mathbf{c} - {}^i \mathbf{a})^2. \quad (4.42)$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich eine Gleichung bezüglich des unbekannten Winkels  $\beta$  der Form

$$A \cos \beta + B \sin \beta + C = 0, \quad (4.43)$$

mit den vom Eingangswinkel  $\gamma$  abhängigen Größen

$$\begin{aligned} A &= 2 [(c_x b_x + c_y b_y) \cos \gamma - (c_x b_y - c_y b_x) \sin \gamma - (a_x c_x + a_y c_y)] \\ B &= 2 [(c_x b_y - c_y b_x) \cos \gamma + (c_x b_x + c_y b_y) \sin \gamma - (a_y c_x - a_x c_y)] \\ C &= -2 [(a_x b_x + a_y b_y) \cos \gamma - (a_y b_x - a_x b_y) \sin \gamma] \\ &\quad + (a_x^2 + a_y^2) + (b_x^2 + b_y^2) + (c_x^2 + c_y^2) - (d_x^2 + d_y^2) \\ &\quad + (a_z - b_z - c_z + d_z)(a_z - b_z - c_z - d_z). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Einsetzen von  $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$  in Gl. (4.43) liefert die mathematisch möglichen Lösungen

$$\begin{aligned} \cos \beta_{1,2} &= \frac{-AC \pm \sqrt{B^2(A^2 + B^2 - C^2)}}{A^2 + B^2} \\ &= -\frac{AC}{A^2 + B^2} \pm \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} |B| \\ \sin \beta_{1,2} &= \frac{-CB^2 \mp A\sqrt{B^2(A^2 + B^2 - C^2)}}{B(A^2 + B^2)} \\ &= -\frac{CB}{A^2 + B^2} \mp \frac{A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} \text{sign } B. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Für  $B = 0$  ist erkennbar, dass  $\sin \beta_{1,2}$  unstetig ist, d. h. an dieser Stelle haben beide Lösungen eine Sprungstelle. Technisch ist dies nicht möglich, denn der Umlenkmechanismus macht in seinem ganzen Schwenkbereich von  $\varphi_{\min}$  bis  $\varphi_{\max}$  eine kontinuierliche Bewegung. Die technische Lösung des Umlenkmechanismus ist eine Kombination aus beiden mathematischen Lösungen in Gl. (4.43). Bei einem Vorzeichenwechsel des Terms  $B$  ist ein Umschalten auf die andere Lösung erforderlich, so dass schließlich folgende technische Lösung für den Umlenkmechanismus gilt:

$$\cos \beta_{1,2} = \begin{cases} -\frac{AC}{A^2 + B^2} \pm \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} |B| & \text{für } B < 0 \\ -\frac{AC}{A^2 + B^2} \mp \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} |B| & \text{für } B \geq 0 \end{cases}$$

$$\sin \beta_{1,2} = \begin{cases} -\frac{CB}{A^2 + B^2} \mp \frac{A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} \operatorname{sign} B & \text{für } B < 0 \\ -\frac{CB}{A^2 + B^2} & \text{für } B = 0 \\ -\frac{CB}{A^2 + B^2} \pm \frac{A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} \operatorname{sign} B & \text{für } B \geq 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

und damit vereinfacht

$$\cos \beta_{1,2} = \frac{-AC \mp B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}$$

$$\sin \beta_{1,2} = \frac{-CB \pm A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}. \quad (4.47)$$

Nun kann mit den bekannten Winkeln  $\gamma$  und  $\beta$  Schleife  $L_2$  gelöst werden. Nach Abb. 4.16b lautet der Vektorzug

$$\mathbf{s} = \mathbf{b} + \mathbf{e} - \mathbf{f} \quad (4.48)$$

und damit die quadratische Zylinderlänge

$$s^2 = \mathbf{s}^2 = (\mathbf{b} + \mathbf{e} - \mathbf{f})^2 \quad (4.49)$$

und in Komponenten

$$\begin{aligned} s^2 &= ({}^i\mathbf{R}_1(\gamma) {}^1\mathbf{b} + {}^i\mathbf{R}_2(\beta) {}^2\mathbf{e} - {}^i\mathbf{f})^2 \\ &= (b_x \cos \gamma - b_y \sin \gamma + e_x \cos \beta - e_y \sin \beta - f_x)^2 \\ &\quad + (b_x \sin \gamma + b_y \cos \gamma + e_x \sin \beta + e_y \cos \beta - f_y)^2 \\ &\quad + (b_z + c_z - f_z)^2. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Hierbei ist zu beachten, dass für  $s^2$  zwei (betragsmäßig) verschiedene Lösungen existieren.

### Umlenkmechanismus vom Typ 3

In Abb. 4.17 ist die WATTsche Kette (Schneider 1999) dargestellt. Der Mechanismus

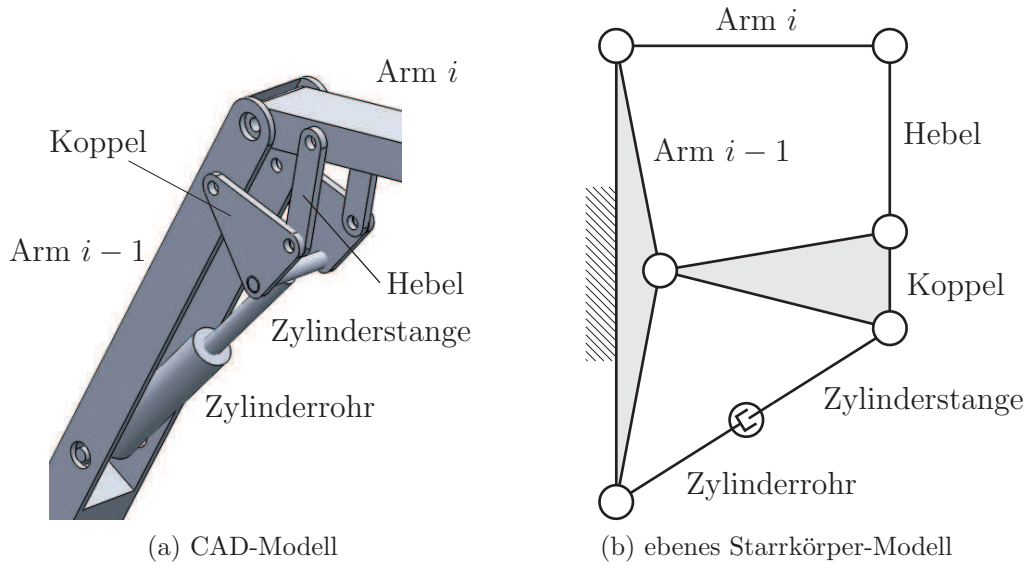


Abbildung 4.17: Umlenkmechanismus vom Typ 3.

besitzt zwei geschlossene kinematische Schleifen  $L_1$  und  $L_2$  (Abb. 4.14), die voneinander abhängen. Diese Verkoppelung lässt sich anhand der Darstellung mittels kinematischer Transformatoren verdeutlichen. Zu diesem Zweck wird der Freiheitsgrad des Mechanismus bestimmt.

Nach Abb. 4.20a lautet der Vektorzug von Schleife  $L_1$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{d} - \mathbf{b}. \quad (4.51)$$

Mit der Schließbedingung des charakteristischen Gelenkpaars (siehe Schramm u. a. 2010a; Hiller und Woernle 1988) gilt

$$\mathbf{c}^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{d} - \mathbf{b})^2. \quad (4.52)$$

und in Komponenten

$$\mathbf{c}^2 = ({}^0\mathbf{a} + {}^0\mathbf{R}_1(z, \beta) {}^1\mathbf{d} - {}^0\mathbf{R}_2(z, \gamma) {}^2\mathbf{b})^2. \quad (4.53)$$

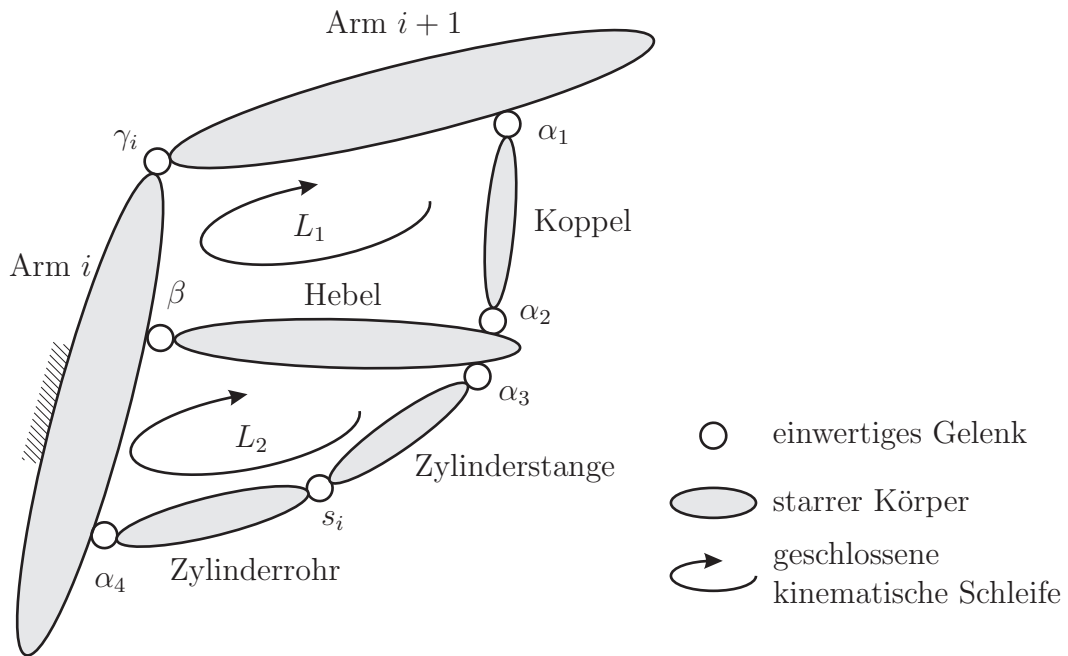
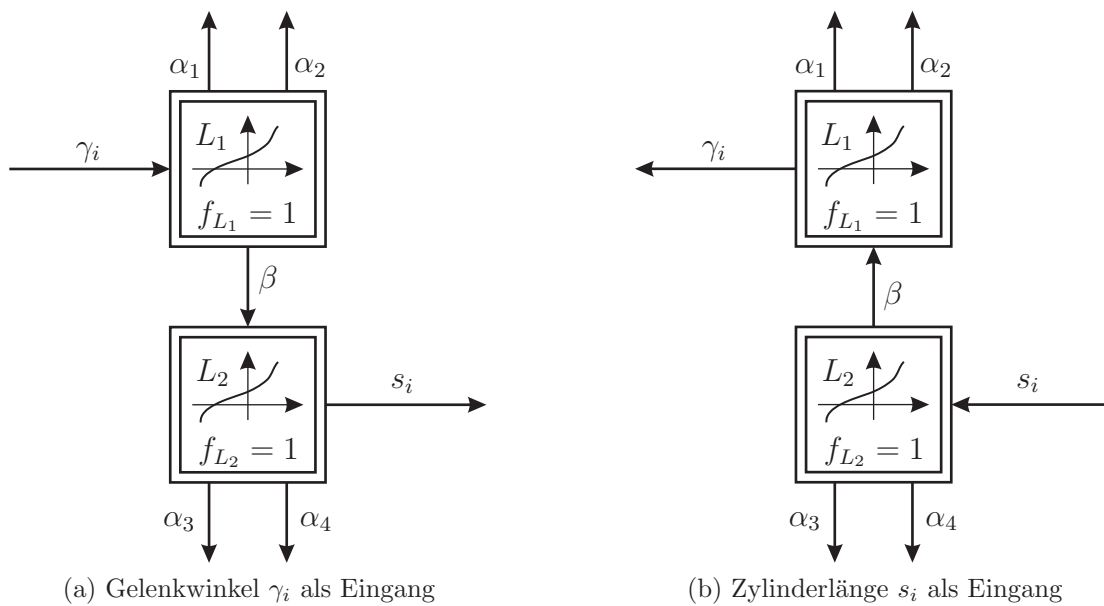
Abbildung 4.18: Topologie der Umlenkkinematik  $i$  vom Typ 3.

Abbildung 4.19: Kinematisches Netz der Umlenkkinematik vom Typ 3.

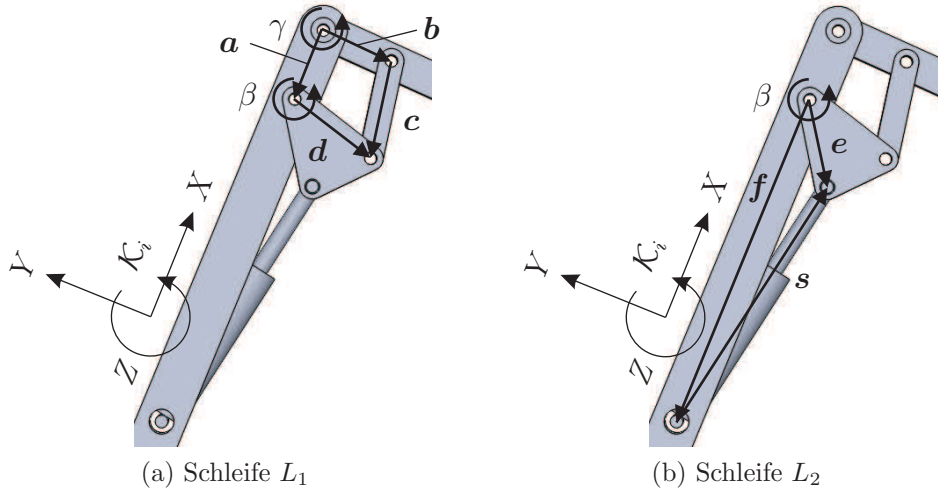


Abbildung 4.20: Definition der Vektoren des Umlenkmechanismus Typ 3.

Es ergibt sich wieder eine quadratische Gleichung in  $\beta$  der Form nach Gl. (4.43), diesmal mit den Faktoren

$$\begin{aligned}
 A &= -2 [(b_x d_x + b_y d_y) \cos \gamma - (b_x d_y - b_y d_x) \sin \gamma - (a_x d_x + a_y d_y)], \\
 B &= 2 [(b_x d_y - b_y d_x) \cos \gamma - (b_x d_x + b_y d_y) \sin \gamma + (a_y d_x - a_x d_y)], \\
 C &= -2 [(a_x b_x + a_y b_y) \cos \gamma + (a_y b_x - a_x b_y) \sin \gamma] \\
 &\quad + (a_x^2 + a_y^2) + (b_x^2 + b_y^2) - (c_x^2 + c_y^2) + (d_x^2 + d_y^2) \\
 &\quad + (a_z - b_z - c_z + d_z)(a_z - b_z - c_z - d_z).
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

und den jeweils zwei Lösungen für  $\cos \beta$  und  $\sin \beta$  gemäß Gl. (4.47).

Die Bestimmung der Zylinderlänge  $s$  erfolgt nach Abb. 4.20b mit

$$\mathbf{s} = \mathbf{e} - \mathbf{f} \tag{4.55}$$

bzw. in Komponenten

$$\begin{aligned}
 s^2 &= ({}^0\mathbf{R}_1(z, \beta)^1\mathbf{e} - {}^0\mathbf{f})^2 \\
 &= -2 [(e_x f_x + e_y f_y) \cos \beta + (e_x f_y - e_y f_x) \sin \beta] \\
 &\quad + (e_x^2 + e_y^2) + (f_x^2 + f_y^2) + (e_z - f_z)^2.
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Die aus den vorangehenden Abschnitten ermittelten Übertragungsfunktionen der drei grundlegenden Typen von Umlenkmechanismen ermöglichen die Darstellung des Übertragungsverhaltens zwischen der Eingangsgröße „Zylinderlänge“ und der Ausgangsgröße „Mastgelenk“. In Abb. 4.21 ist das Übertragungsverhalten aller Umlenkmechanismen eines fünfarmigen Manipulators dargestellt. Entsprechend ergibt sich das Übertragungsverhalten mit dem Mastgelenk als Eingangsgröße und der

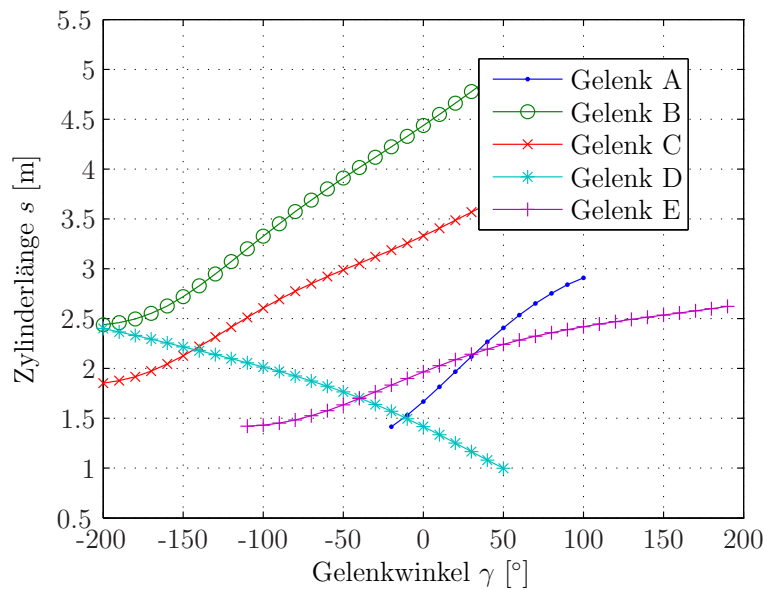


Abbildung 4.21: Übertragungsverhalten zwischen den Zylinderlängen und den Gelenkwinkeln der Mastgelenke.

Zylinderlänge als Ausgangsgröße durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden der beiden Achsen.

Die analytischen Übertragungsfunktionen der vorliegenden drei Typen von Umlenkmechanismen weisen eine hohe Komplexität auf und damit einen hohen Bedarf an Rechenleistung und -zeit. Zu diesem Zweck ist es sinnvoll, die Übertragungsfunktion durch eine Nachschlagetabelle bzw. Look-Up-Tabelle oder ein Kinematik-Kennfeld (Lang 1997) zu ersetzen.

#### 4.2.4 Berücksichtigung der statischen Biegeelastizität

Die bisherigen Betrachtungen der Kinematik des Betonverteilmasts haben die elastischen Verformungen der Arme nicht berücksichtigt. Diese haben besonders bei den gegebenen Dimensionen der Autobetonpumpe einen großen Einfluss auf die Position der Mastspitze.

Im Folgenden sollen nur statische Elastizitäten der Auslegerarme berücksichtigt werden. Statisch, weil im Hinblick auf die Echtzeitfähigkeit die Berechnung der dynamischen Verformungen zu aufwändig wäre. Des Weiteren werden die einzelnen Arme durch EULER-BERNOULLI-Balken mit einer entsprechenden Streckenlast über der gesamten Armlänge modelliert. Diese Modellannahme ist berechtigt, da die Länge im Verhältnis zum Querschnitt sehr groß ist.

Außerdem gelten folgende Vereinfachungen:



- das homogene Material ist für jeden Arm identisch, d.h. Elastizitätsmodul  $E = \text{const.}$
- konstanter Balkenquerschnitt für jeden Arm  $k$ , d.h. Flächenträgheitsmoment  $I_k = \text{const.}$

Des Weiteren werden räumliche Verformungen, d.h. Verformungen außerhalb der  $rz$ -Ebene vernachlässigt, unter der Annahme, dass diese im Vergleich zu den Verformungen in der  $rz$ -Ebene sehr klein sind. Vergleiche hierzu Abb. 4.7.

### Biegelinie des fest eingespannten Euler-Bernoulli-Balkens

Zunächst kann jeder Auslegerarm der Länge  $L$  durch einen im Punkt  $A$  fest eingespannten elastischen Balken mit konstanter Streckenlast und äußeren Kräften und Momenten im Punkt  $B$  modelliert werden (Abb. 4.22).

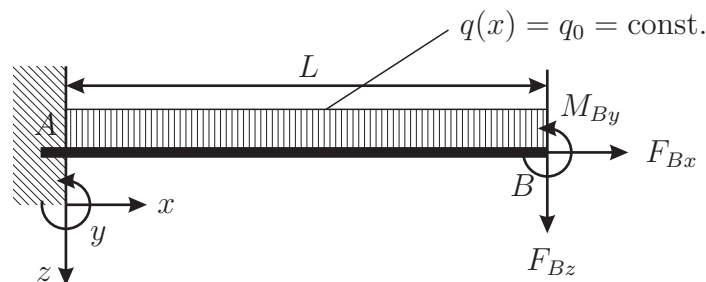


Abbildung 4.22: Fest eingespannter elastischer Balken mit Streckenlast über der gesamten Balkenlänge und eingprägten Kräften und Momenten am freien Ende.

Anschließend können die Auflagerreaktionen gemäß Abb. 4.23 durch Freischnitt im Punkt  $A$  berechnet werden. Es gilt dann

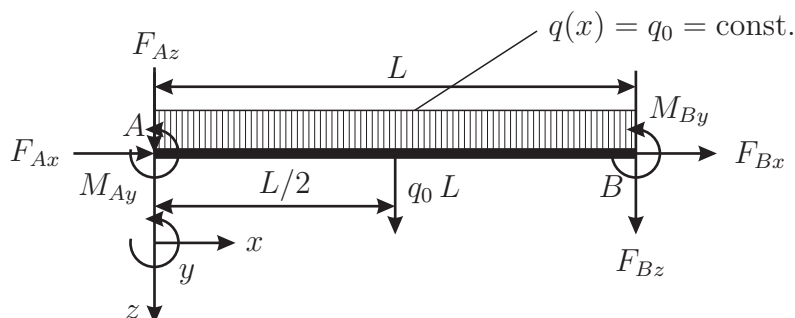


Abbildung 4.23: Freischnitt am eingespannten Ende.

$$F_{Ax} = F_{Bx} \quad (4.57)$$

$$F_{Az} = F_{Bz} + q_0 L \quad (4.58)$$

$$M_{Ay} = M_{By} + F_{Bz} L + q_0 L \frac{L}{2} \quad (4.59)$$

Daraufhin können mit Hilfe von Abb. 4.24 und der Auflagerreaktionen die Schnitt-

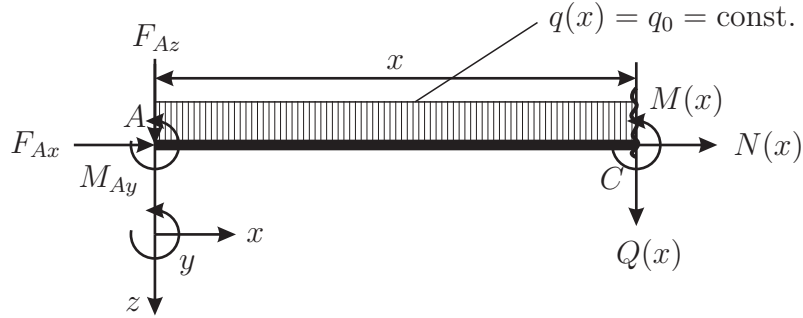


Abbildung 4.24: Schnittgrößen des elastischen Balkens.

größen  $N(x)$  (Normalkraftverlauf),  $Q(x)$  (Querkraftverlauf) und  $M(x)$  (Momentenverlauf) mit

$$N(x) = -F_{Bx} \quad (4.60)$$

$$Q(x) = (F_{Bz} + q_0 L) - q_0 x \quad (4.61)$$

$$M(x) = (F_{Bz} + q_0 L) x - \frac{1}{2} q_0 x^2 - \left( M_{By} + F_{Bz} L + q_0 L \frac{L}{2} \right) \quad (4.62)$$

berechnet werden.

Ist der Balken noch bezüglich der Horizontalen um den Winkel  $\varphi$  gedreht, so ergibt sich gemäß Abb. 4.25 für die Schnittgrößen

$$N(x) = -F_{Bx} - q_0 \sin \varphi \quad (4.63)$$

$$Q(x) = (F_{Bz} + q_0 L \cos \varphi) - q_0 x \cos \varphi \quad (4.64)$$

$$M(x) = (F_{Bz} + q_0 L \cos \varphi) x - \frac{1}{2} q_0 x^2 \cos \varphi - \left( M_{By} + F_{Bz} L + q_0 L \frac{L}{2} \cos \varphi \right). \quad (4.65)$$

Die Differentialgleichung der Biegelinie lautet nun

$$EI w''(x) = -M(x) \quad (4.66)$$

Also ist

$$EI w''(x) = -(F_{Bz} + q_0 L \cos \varphi) x - \frac{1}{2} q_0 x^2 \cos \varphi + \left( M_{By} + F_{Bz} L + q_0 L \frac{L}{2} \cos \varphi \right) \quad (4.67)$$

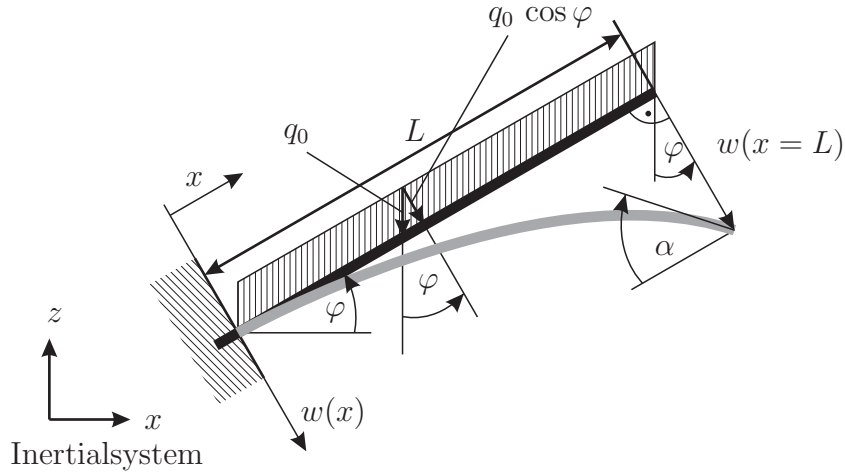


Abbildung 4.25: Balken um den Winkel  $\varphi$  zur Horizontalen gedreht. Anteil der Streckenlast:  $q_0 \cos \varphi$ , zusätzlicher Anteil in  $x$ -Richtung:  $q_0 \sin \varphi$ .

und damit

$$EI_y w'(x) = -\frac{1}{2}(F_{Bz} + q_0 L \cos \varphi) x^2 - \frac{1}{6} q_0 x^3 \cos \varphi + \left( M_{By} + F_{Bz} L + q_0 L \frac{L}{2} \cos \varphi \right) x + C_1 \quad (4.68)$$

und schließlich

$$EI_y w(x) = -\frac{1}{6}(F_{Bz} + q_0 L \cos \varphi) x^3 - \frac{1}{24} q_0 x^4 \cos \varphi + \frac{1}{2} \left( M_{By} + F_{Bz} L + q_0 L \frac{L}{2} \cos \varphi \right) x^2 + C_1 x + C_2. \quad (4.69)$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen des eingespannten Balkens

$$w(x=0) = 0, \quad (4.70)$$

$$w'(x=0) = 0 \quad (4.71)$$

erhält man nach einigen Umformungen die Gleichung der Biegelinie

$$w(x) = \frac{x^2}{24 EI} \left[ -4(F_{Bz} + q_0 L \cos \varphi) x + q_0 \cos \varphi x^2 + 12 F_{Bz} L + 6 q_0 \cos \varphi L^2 - 12 M_{By} \right]. \quad (4.72)$$

Im Anschluss soll nur die Verformung an den Balkenenden exakt übereinstimmen, während die Biegelinie dazwischen linear approximiert wird. Die Auslenkung am Balkenende ergibt sich an der Stelle  $x = L$  schließlich zu

$$w_L = w(x=L) = \frac{L^2}{24 EI} (8 F_{Bz} L + 3 q_0 L^2 \cos \varphi - 12 M_{By}). \quad (4.73)$$

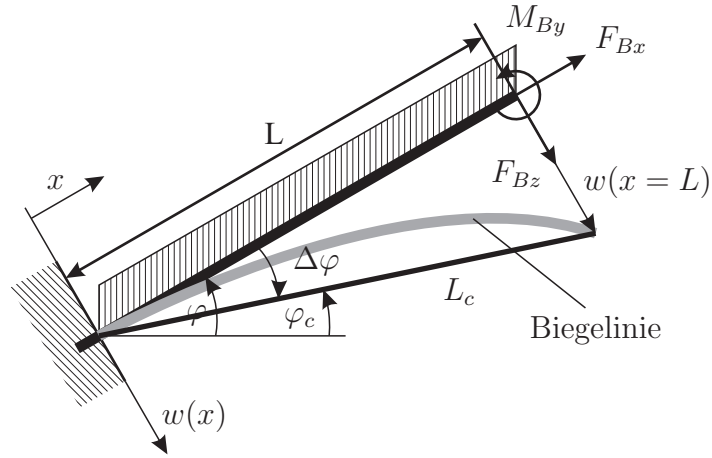


Abbildung 4.26: Biegelinie des schräg eingespannten Balkens.

Nach Abb. 4.26 kann durch diese Annahme ein Differenzwinkel  $\Delta\varphi$  gemäß

$$\tan \Delta\varphi = \frac{w_L}{L} \quad (4.74)$$

berechnet werden. Da

$$w_L \ll L \Rightarrow \frac{w_L}{L} \ll 1 \Rightarrow \tan \Delta\varphi \ll 1 \Rightarrow \tan \Delta\varphi \approx \Delta\varphi, \quad (4.75)$$

gilt

$$\Delta\varphi \approx \Delta\varphi_{\text{app}} = \frac{w_L}{L}. \quad (4.76)$$

Damit lässt sich der Korrekturwinkel  $\varphi_c$  bestimmen:

$$\varphi_c = \varphi - \Delta\varphi_{\text{app}} = \varphi - \frac{w_L}{L} \quad (4.77)$$

Außerdem kann mit Gl. (4.75) die Armlänge  $L_c$  durch

$$L_c \approx L \quad (4.78)$$

approximiert werden.

### Biegelinie der Auslegerarme

Nachdem die Biegelinie eines einzelnen Auslegers ermittelt worden ist, können die Ergebnisse aus dem vorigen Abschnitt auf die Bestimmung der Biegelinie des gesamten Masts übertragen werden.

Die Biegelinie eines Auslegers ist abhängig von seinem Neigungswinkel und seiner Streckenlast. Sie wird zusätzlich von den am Balkenende angreifenden Kräften und

Momenten des nachfolgenden Auslegers beeinflusst. Aus diesem Grund muss die Biegelinie des gesamten Masts sukzessiv von der Mastspitze beginnend bis zur Basis berechnet werden. Dabei muss beachtet werden, dass bei der Kraft- und Momentenübertragung von einem Ausleger zum vorigen die Kräfte im Koordinatensystem des vorigen Auslegers zerlegt werden müssen.

Im Folgenden sollen vereinfacht keine Kräfte und Momente an der Mastspitze wirken. Allein die Kräfte und Momente, die aus den Streckenlasten der einzelnen Ausleger hervorgehen, sollen betrachtet werden. Unter der im vorigen Abschnitt erwähnten Vereinfachung, dass nur die Biegelinie an den Balkenenden, d. h. in den Gelenkpunkten identisch sein sollen und zwischen diesen Punkten linear approximiert wird (siehe Abb. 4.26), ergibt sich folgender sukzessiver Algorithmus zur Berechnung der Auslenkung der Biegelinie in den Gelenkpunkten einer  $n$ -armigen ABP:

1. Setze  $F_{Bx} = 0$ ,  $F_{Bz} = 0$ ,  $M_{By} = 0$ ,  $i := n$
2. Berechne gemäß Gl. (4.72) die Auslenkung der Biegelinie am Ende des Auslegers  $i$

$$w_{i,l} = w(x = l_i, \varphi_i, F_{Bx}, F_{Bz}) \quad (4.79)$$

bzw. den approximierten Differenzwinkel gemäß Gl. (4.76)

$$\Delta\varphi_{i,\text{app}} = \frac{w(x = l_i, \varphi_i, F_{Bx}, F_{Bz})}{l_i} \quad (4.80)$$

3. Berechne die Normal- und Querkraft und das Biegemoment am Balkenanfang gemäß den Gleichungen (4.63)–(4.65)

$$N_{i,0} = N(x = 0, \varphi_i, F_{Bx}) \quad (4.81)$$

$$Q_{i,0} = Q(x = 0, \varphi_i, F_{Bz}) \quad (4.82)$$

$$M_{i,0} = M(x = 0, \varphi_i, F_{Bz}, M_{By}) \quad (4.83)$$

4. Zerlege  $N_{i,0}$ ,  $Q_{i,0}$  und  $M_{i,0}$  ins Koordinatensystem des Auslegers  $i - 1$

$$\begin{bmatrix} F_{Bx} \\ M_{By} \\ F_{Bz} \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\varphi_{i-1} - \varphi_i) \begin{bmatrix} N_{i,0} \\ M_{i,0} \\ Q_{i,0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

5. Setze  $i := i - 1$

6. Falls  $i > 0$ , gehe zurück zu Punkt 2.

Mit Hilfe von Gl. (4.77) können schließlich alle Korrekturwinkel berechnet werden:

$$\varphi_{i,c} = \varphi_i - \Delta\varphi_{i,\text{app}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.85)$$

Im Folgenden soll zur Vereinfachung der Schreibweise  $\Delta\varphi_i := \Delta\varphi_{i,\text{app}}$  gelten.

Für die weiteren Schritte, wie der Berechnung der inversen Kinematik werden der Sinus und Kosinus von  $\varphi_{i,c}$  benötigt. Aus Gl. (4.85) folgt zunächst

$$\cos \varphi_{i,c} = \cos(\varphi_i - \Delta\varphi_i). \quad (4.86)$$

Das Additionstheorem liefert

$$\cos \varphi_{i,c} = \cos \varphi_i \cos \Delta\varphi_i - \sin \varphi_i \sin \Delta\varphi_i. \quad (4.87)$$

Da  $\Delta\varphi_i \ll 1$ , ist  $\cos \Delta\varphi_i \approx 1$  und  $\sin \Delta\varphi_i \approx \Delta\varphi_i$ , so dass schließlich folgt

$$\cos \varphi_{i,c} = \cos \varphi_i - \Delta\varphi_i \sin \varphi_i \quad (4.88)$$

und entsprechend

$$\sin \varphi_{i,c} = \sin \varphi_i + \Delta\varphi_i \cos \varphi_i. \quad (4.89)$$

### Korrekturmatrix

Durch symbolisches Einsetzen in den Algorithmus ist ein linearer Zusammenhang zwischen den Auslenkungen  $w_{i,L}$  bzw. Differenzwinkeln  $\Delta\varphi_i$  und den Kosinuswerten  $\cos \varphi_i$  erkennbar. Das Ausklammern von  $\cos \varphi_i$  liefert eine konstante Matrix  $\mathbf{K}$ , die Korrekturmatrix, die nur abhängig von der bekannten, konstanten Streckenlast und Länge der Ausleger ist.

Für eine  $n$ -armige ABP können die Matrixelemente von  $\mathbf{K}$  explizit berechnet werden. Der Vorteil hierbei liegt in der einmaligen numerischen Berechnung von  $\mathbf{K}$ , die spezifisch für jeden Typ einer ABP ist.

Die approximierten Differenzwinkel  $\Delta\varphi_i$  werden auf folgende Weise berechnet:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi_1 \\ \Delta\varphi_2 \\ \vdots \\ \Delta\varphi_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,n} \\ 0 & K_{2,2} & \dots & K_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & K_{n,n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}} \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \\ \cos \varphi_2 \\ \vdots \\ \cos \varphi_n \end{bmatrix}. \quad (4.90)$$

$\mathbf{K}$  ist eine obere Dreiecksmatrix. Diese Form bestätigt die Tatsache, dass die Elastizität eines Auslegers nicht von den Belastungen der vorangehenden Ausleger beeinflusst wird.

Auf der Hauptdiagonalen lauten die Elemente von  $\mathbf{K}$  explizit

$$K_{i,i} = \frac{l_i^2}{24 EI_i} \left( 3 q_i l_i + 8 \sum_{j=i+1}^n q_j l_j \right), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.91)$$

und

$$K_{n,n} = \frac{q_n l_n^3}{8 EI_n}. \quad (4.92)$$

Die oberen Matrixelemente sind

$$K_{i,k} = \frac{l_i l_k}{12 EI_i} \left( 3 q_k l_k + 6 \sum_{j=k+1}^n q_j l_j \right), \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n-2 \\ k = i+1, \dots, n-1 \end{matrix} \quad (4.93)$$

und

$$K_{i,n} = \frac{q_n l_n^2 l_i}{4 EI_i}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (4.94)$$

Beispielhaft lautet die Korrekturmatrix einer 4-armigen ABP

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{l_1^2(3q_1l_1+8q_2l_2+8q_3l_3+8q_4l_4)}{24EI_1} & \frac{l_1l_2(q_2l_2+2q_3l_3+2q_4l_4)}{4EI_1} & \frac{l_1l_3(q_3l_3+2q_4l_4)}{4EI_1} & \frac{q_4l_4^2l_1}{4EI_1} \\ 0 & \frac{l_2^2(3q_2l_2+8q_3l_3+8q_4l_4)}{24EI_2} & \frac{l_2l_3(q_3l_3+2q_4l_4)}{4EI_2} & \frac{q_4l_4^2l_2}{4EI_2} \\ 0 & 0 & \frac{l_3^2(3q_3l_3+8q_4l_4)}{24EI_3} & \frac{q_4l_4^2l_3}{4EI_3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{q_4l_4^3}{8EI_4} \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

## Ergebnisse

Im Folgenden sollen die Erkenntnisse anhand eines einfachen Modells einer 5-armigen ABP angewendet werden. Dabei sollen die Unterschiede zwischen einem starren und elastischen Modellansatz verdeutlicht werden. Folgende Daten von Stahl werden zur Modellbildung verwendet:

$$\text{Dichte } \varrho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad (4.96)$$

$$\text{Elastizitätsmodul } E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2. \quad (4.97)$$

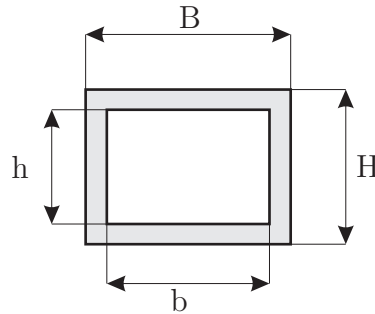


Abbildung 4.27: Vereinfachter Querschnitt der Auslegerarme.

Die Querschnitte aller Ausleger sollen durch ein Kastenprofil mit dem

$$\text{Flächenträgheitsmoment } I = \frac{1}{12}(B H^3 - b h^3) \quad (4.98)$$

vereinfacht werden (Abb. 4.27).

Das Ergebnis ist in Abb. 4.28 zu sehen. Es ist zu erkennen, dass die Position der

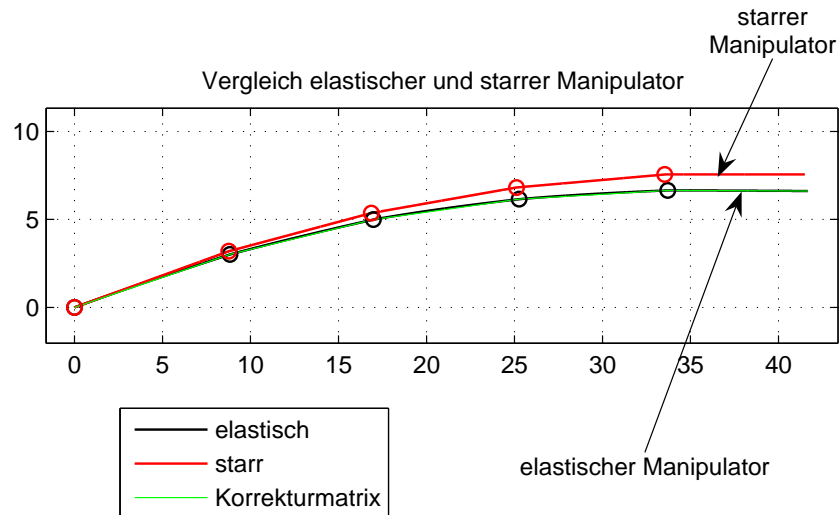


Abbildung 4.28: Vergleich der Modelle des starren und elastischen Manipulators.

Mastspitze des starren Manipulators deutlich von der des elastischen Manipulators abweicht. In dieser Mastkonfiguration sind zwischen starrem und elastischen Manipulator an der Mastspitze Höhenunterschiede von bis zu 1 m erkennbar. Durch die



Nachkorrektur mit Hilfe der Korrekturmatrix, mit der die Auslenkung in den Gelenkpunkten berechnet und zwischen den Gelenkpunkten linear approximiert wird, kann eine deutliche Verbesserung der Position der Mastspitze erreicht werden.

## 4.3 Inverse Kinematik

### 4.3.1 Einleitung

Die Einhebelsteuerung soll den Bediener bei der Positionierung der Spitze<sup>5</sup> des Verteilmasts unterstützen. Bei der konventionellen Einzelgelenksteuerung (siehe Abb. 4.29a) muss der Bediener in der Lage sein, mehrere geeignete Gelenke gleichzeitig zu steuern, d. h. mehrere Hebel gleichzeitig zu betätigen, um die Spitze zu bewegen und sie dabei auf gleicher Höhe zu halten – eine typische Bedieneraufgabe beim Befüllen von Betonflächen. Der Maschinist muss also ständig zwischen den Gelenkbewegungen und der Bewegung der Spitze „umrechnen“, was mit steigender Anzahl an Armsegmenten immer schwieriger wird.

Die Einhebelsteuerung soll es nun dem Maschinisten ermöglichen, die Bewegungsrichtung der Spitze direkt anzusteuern, wodurch er vom ständigen „Umrechnen“ entlastet wird und sich somit auf die eigentliche Positionierung der Spitze konzentrieren kann (Abb. 4.29b und 4.29c). Folglich reduziert sich die Positionierung des Verteilmasts bzw. der Spitze auf drei Bewegungen, nämlich Spitze vorwärts/rückwärts, herauf/herunter und seitwärts links/rechts<sup>6</sup>, unabhängig von der Anzahl der Armsegmente. Das Ansteuern der Spitze kann also theoretisch mit einem einzigen Hebel realisiert werden – daher Einhebelsteuerung – was jedoch aus praktischen Gründen nicht umgesetzt wird.

Die Einhebelsteuerung an sich kann auf verschiedene Arten umgesetzt werden. Bei der zylindrischen Einhebelsteuerung gemäß Abb. 4.29b bestimmt der Bediener die Höhe und den Radius der Mastspitze, während die Drehung um die Hochachse unabhängig davon gesteuert wird. In Abb. 4.29c ist die kartesische Steuerung abgebildet. Möchte der Bediener beispielsweise die Mastspitze zur Seite bewegen, hat dies sowohl eine Drehung als auch eine Radiusänderung des gesamten Verteilmasts zur Folge. Der in den einzelnen Gelenken lokal auftretende Umlenkmechanismus – der die translatorische Zylinderbewegung in rotatorische Armbewegung umsetzt –

---

<sup>5</sup>auch TCP (Tool Center Point) oder Endeffektor genannt

<sup>6</sup>gemäß den drei Freiheitsgraden eines Punktes im Raum. Daneben erlaubt die spezielle kinematische Struktur des Masts nur eine Vorgabe der Orientierung, nämlich die Neigung des letzten Armsegments.

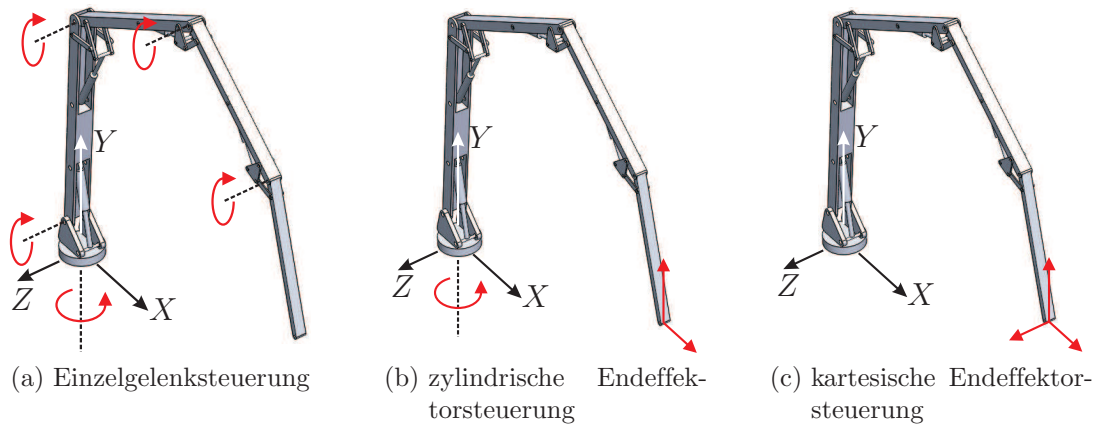


Abbildung 4.29: Prinzip der Einzelgelenk- und Endeffektorsteuerung anhand eines 5-armigen Manipulators.

wird in der inversen Kinematik des gesamten Systems zunächst nicht berücksichtigt. Im Rahmen dieser Arbeit soll die zylindrische Einhebelsteuerung realisiert werden (Abb. 4.29b).

Zum Lösen der inversen Kinematik gilt es, Gl. (4.23) nach  $\dot{\gamma}$  aufzulösen, wobei im allgemeinen unendlich viele Lösungen von  $\dot{\gamma}$  existieren, da resultierend aus der Redundanz des Manipulators weniger Gleichungen als Unbekannte  $\dot{\gamma}$  zur Verfügung stehen. Die Redundanz wird deshalb durch die Formulierung eines Optimierungsproblems, d. h. eines quadratischen Optimierungsproblems<sup>7</sup> aufgelöst, welches im Folgenden hergeleitet wird.

### 4.3.2 Affines Manipulierbarkeitsmaß

Zunächst soll das Konzept der *affinen Manipulierbarkeit* (Schlemmer 2000) vorgestellt werden. Die Berücksichtigung dieser skalaren Größe wirkt sich positiv auf die numerische Lösung des quadratischen Programms aus und liefert dem Bediener ein Indiz über die Manipulierbarkeit in der aktuellen Mastkonfiguration.

In Abb. 4.30 ist die affine Manipulierbarkeit grafisch dargestellt. Sie sagt aus, in welchem Maße sich eine vom Bediener vorgegebene Endeffektor-Pose<sup>8</sup>  $\mathbf{w}_{\text{desired}}$  aus der Ausgangs-Pose  $\mathbf{w}_0$  realisieren lässt, wobei die realisierbare bzw. zulässige Pose mit  $\mathbf{w}_{\text{feasible}}$  gekennzeichnet ist. Die zulässige Pose  $\mathbf{w}_{\text{feasible}}$  befindet sich dabei auf

<sup>7</sup>oder quadratisches Programm

<sup>8</sup>Mit Pose ist die Position *und* Orientierung gemeint

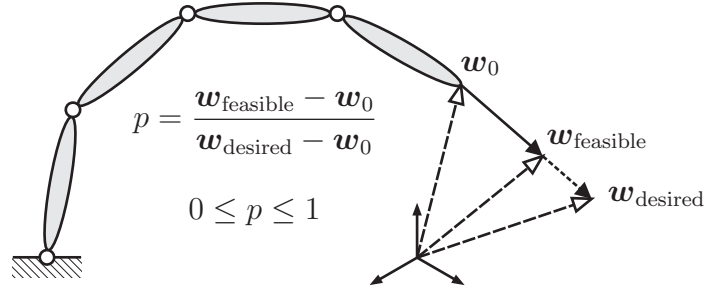


Abbildung 4.30: Definition der affinen Manipulierbarkeit (Schlemmer 2000).

der Strecke zwischen  $\mathbf{w}_0$  und  $\mathbf{w}_{\text{desired}}$ , so dass folgender Zusammenhang hergeleitet werden kann

$$p = \frac{\mathbf{w}_{\text{feasible}} - \mathbf{w}_0}{\mathbf{w}_{\text{desired}} - \mathbf{w}_0}, \quad (4.99)$$

wobei der Skalar  $p$  das affine Manipulierbarkeitsmaß kennzeichnet. Für  $p$  gilt, dass

$$0 \leq p \leq 1, \quad (4.100)$$

weil sonst die zulässige Pose  $\mathbf{w}_{\text{feasible}}$  für  $p < 0$  in entgegengesetzter Richtung liegen und für  $p > 1$  über das Ziel hinaus schießen würde.

Gemäß Gl. (4.23) lautet nun die Vorwärtskinematik auf Geschwindigkeitsebene unter Berücksichtigung der affinen Manipulierbarkeit

$$\dot{\mathbf{w}}_{\text{feasible}} = p \dot{\mathbf{w}}_{\text{desired}} = \mathbf{J}_{\text{TCP}} \dot{\mathbf{q}}, \quad (4.101)$$

wobei  $\mathbf{J}_{\text{TCP}}$  die JACOBI-Matrix der Translation und Rotation (Abschnitt 4.2.2 und 4.2.2) enthält und  $\dot{\mathbf{q}} := \dot{\boldsymbol{\gamma}}$ . Aus Gründen der Übersichtlichkeit gelte im Folgenden  $\mathbf{J} := \mathbf{J}_{\text{TCP}}$  und  $\dot{\mathbf{w}}_{\text{TCP}} := \dot{\mathbf{w}}_{\text{desired}}$ .

### 4.3.3 Lösungsansatz als quadratisches Optimierungsproblem

Die inverse Kinematik lässt sich durch folgendes quadratische Programm bezüglich der zu optimierenden Variablen  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}$  und dem Manipulierbarkeitsmaß  $p$  darstellen. Löse die Zielfunktion

$$\min_{\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, p\}} \frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_{\text{ref}})^\top \mathbf{L} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_{\text{ref}}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}} - \beta p \quad (4.102)$$

unter den Nebenbedingungen<sup>9</sup> (Vorwärtskinematik auf Geschwindigkeitsebene)

$$\mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} - p \dot{\mathbf{w}}_{\text{TCP}} = \mathbf{0} \quad (4.103)$$

<sup>9</sup>abgekürzt auch u. d. N.

und den sog. Box-Constraints

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{q}_{\min} & \leq & \mathbf{q} & \leq & \mathbf{q}_{\max} \\ \dot{\mathbf{q}}_{\min} & \leq & \dot{\mathbf{q}} & \leq & \dot{\mathbf{q}}_{\max} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{\min} & \leq & \ddot{\mathbf{q}} & \leq & \ddot{\mathbf{q}}_{\max} \\ 0 & \leq & p & \leq & 1 \end{array}, \quad (4.104)$$

wobei  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{B}$  positiv definite Wichtungsmatrizen – aus Rechenzeitgründen vorzugsweise positiv definite Diagonalmatrizen – der Dimension  $\mathbb{R}^{n \times n}$  sind. Der erste quadratische Term aus Gl. (4.102) minimiert den Abstand der Lösungs-Gelenkwinkel  $\mathbf{q}$  von Referenz-Gelenkwinkeln  $\mathbf{q}_{\text{ref}}$ , die beispielsweise als Mittelpunkt der minimalen und maximalen Gelenkwinkel definiert sind

$$q_{\text{ref},i} := \frac{1}{2} (q_{\min,i} + q_{\max,i}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.105)$$

Damit werden Lösungen gefunden, die möglichst weit weg von den Endanschlägen der Gelenke liegen, um größte Manipulierbarkeit zu gewährleisten. Es entstehen dadurch „schlanke“ Gelenkwinkelverläufe. Der zweite und dritte quadratische Term minimieren die Lösung der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{q}}$  und Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{q}}$ , die „geschmeidige“ Gelenkwinkel zur Folge haben.  $\beta$  ist ein positiver skalarer Wert, womit die Stabilität des numerischen Algorithmus zur Lösung des quadratischen Programms kontrolliert werden kann. Die in den Nebenbedingungen auftretenden Größen  $\mathbf{q}_{\min/\max}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_{\min/\max}$  und  $\ddot{\mathbf{q}}_{\min/\max}$  beschreiben die technischen Beschränkungen minimale bzw. maximale Gelenkwinkel-Endlagen, -Geschwindigkeiten und -Beschleunigungen. Die letzte Box-Constraint ist die aus Abschnitt (4.3.2) bekannte Beschränkung des affinen Manipulierbarkeitsmaßes.

Mit den Näherungen

$$\dot{\mathbf{q}} \approx \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_0}{\Delta T}$$

und

$$\ddot{\mathbf{q}} \approx \frac{\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0}{\Delta T} = \frac{1}{\Delta T} \left( \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_0}{\Delta T} - \frac{\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_{-1}}{\Delta T} \right) = \frac{\mathbf{q} - 2\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_{-1}}{\Delta T^2}$$

erhält man aus den quadratischen Anteilen der Zielfunktion

$$\frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_{\text{ref}})^\top \mathbf{L} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_{\text{ref}}) = \frac{1}{2} (\mathbf{q}^\top \mathbf{L} \mathbf{q} - 2\mathbf{q}_{\text{ref}}^\top \mathbf{L} \mathbf{q} + \underbrace{\mathbf{q}_{\text{ref}}^\top \mathbf{L} \mathbf{q}_{\text{ref}}}_{\text{const.}}), \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} &\approx \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^\top}{\Delta T} \mathbf{M} \frac{(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)}{\Delta T} \\ &= \frac{1}{2\Delta T^2} (\mathbf{q}^\top \mathbf{M} \mathbf{q} - 2\mathbf{q}_0^\top \mathbf{M} \mathbf{q} + \underbrace{\mathbf{q}_0^\top \mathbf{M} \mathbf{q}_0}_{\text{const.}}) \end{aligned} \quad (4.107)$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \ddot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}} &\approx \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{q} - 2\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_{-1})}{\Delta T^2} \mathbf{B} \frac{(\mathbf{q} - 2\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_{-1})^\top}{\Delta T^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{[\mathbf{q} - (2\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_{-1})]^\top}{\Delta T^2} \mathbf{B} \frac{[\mathbf{q} - (2\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_{-1})]}{\Delta T^2} \\
&= \frac{1}{2\Delta T^4} [\mathbf{q}^\top \mathbf{B} \mathbf{q} - 2(2\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_{-1})^\top \mathbf{B} \mathbf{q} + \underbrace{(2\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_{-1})^\top \mathbf{B} (2\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_{-1})^\top}_{const.}],
\end{aligned} \tag{4.108}$$

mit  $\mathbf{q} := \mathbf{q}(t_i)$ ,  $\mathbf{q}_0 := \mathbf{q}(t_{i-1})$ ,  $\mathbf{q}_{-1} := \mathbf{q}(t_{i-2})$  und der Abtastzeit  $\Delta T := t_i - t_{i-1} = \text{const.}$

Die konstanten Anteile leisten zur Minimierung der Zielfunktion bezüglich  $\mathbf{q}$  und  $p$  keinen Beitrag, so dass die Zielfunktion nun nach einigen Umformungen lautet

$$\min_{\{\mathbf{q}, p\}} \frac{1}{2} \mathbf{q}^\top \left( \mathbf{L} + \frac{\mathbf{M}}{\Delta T^2} + \frac{\mathbf{B}}{\Delta T^4} \right) \mathbf{q} + \left( -\mathbf{q}_{\text{ref}}^\top \mathbf{L} - \mathbf{q}_0^\top \frac{\mathbf{M}}{\Delta T^2} - (2\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_{-1})^\top \frac{\mathbf{B}}{\Delta T^4} \right) \mathbf{q} - \beta p \tag{4.109}$$

beziehungsweise

$$\min_{\{\mathbf{q}, p\}} \frac{1}{2} \mathbf{q}^\top \widehat{\mathbf{G}} \mathbf{q} + \widehat{\mathbf{d}}^\top \mathbf{q} - \beta p \tag{4.110}$$

mit

$$\widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{L} + \frac{\mathbf{M}}{\Delta T^2} + \frac{\mathbf{B}}{\Delta T^4} \tag{4.111}$$

und

$$\widehat{\mathbf{d}} = \left( -\mathbf{q}_{\text{ref}}^\top \mathbf{L} - \mathbf{q}_0^\top \frac{\mathbf{M}}{\Delta T^2} - (2\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_{-1})^\top \frac{\mathbf{B}}{\Delta T^4} \right)^\top. \tag{4.112}$$

Aus den Nebenbedingungen (Vorwärtskinematik auf Geschwindigkeitsebene) ergibt sich

$$\mathbf{J} \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_0}{\Delta T} - p \dot{\mathbf{w}}_{\text{TCP}} = \mathbf{0} \tag{4.113}$$

oder

$$\mathbf{J} \mathbf{q} - p \dot{\mathbf{w}}_{\text{TCP}} \Delta T = \mathbf{J} \mathbf{q}_0. \tag{4.114}$$

Die Box-Constraints ergeben

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{\min} &\leq \mathbf{q} \leq \mathbf{q}_{\max} \\
\dot{\mathbf{q}}_{\min} &\leq \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_0}{\Delta T} \leq \dot{\mathbf{q}}_{\max} \\
\ddot{\mathbf{q}}_{\min} &\leq \frac{\mathbf{q} - 2\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_{-1}}{\Delta T^2} \leq \ddot{\mathbf{q}}_{\max} \\
0 &\leq p \leq 1
\end{aligned} \tag{4.115}$$

oder

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{q}_{\min} & \leq & \mathbf{q} & \leq & \mathbf{q}_{\max} \\ \dot{\mathbf{q}}_{\min} \Delta T & \leq & \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 & \leq & \dot{\mathbf{q}}_{\max} \Delta T \\ \ddot{\mathbf{q}}_{\min} \Delta T^2 & \leq & \mathbf{q} - 2\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_{-1} & \leq & \ddot{\mathbf{q}}_{\max} \Delta T^2 \\ 0 & \leq & p & \leq & 1 \end{array} \quad (4.116)$$

oder

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{q}_{\min} & \leq & \mathbf{q} & \leq & \mathbf{q}_{\max} \\ \dot{\mathbf{q}}_{\min} \Delta T + \mathbf{q}_0 & \leq & \mathbf{q} & \leq & \dot{\mathbf{q}}_{\max} \Delta T + \mathbf{q}_0 \\ \ddot{\mathbf{q}}_{\min} \Delta T^2 + 2\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_{-1} & \leq & \mathbf{q} & \leq & \ddot{\mathbf{q}}_{\max} \Delta T^2 + 2\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_{-1} \\ 0 & \leq & p & \leq & 1 \end{array} \quad (4.117)$$

oder

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{q}}_{\min} & \leq & \mathbf{q} & \leq & \hat{\mathbf{q}}_{\max} \\ 0 & \leq & p & \leq & 1 \end{array} \quad (4.118)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_{\min} &= \max(\mathbf{q}_{\min}, \dot{\mathbf{q}}_{\min} \Delta T + \mathbf{q}_0, \ddot{\mathbf{q}}_{\min} \Delta T^2 + 2\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_{-1}) \\ \hat{\mathbf{q}}_{\max} &= \min(\mathbf{q}_{\max}, \dot{\mathbf{q}}_{\max} \Delta T + \mathbf{q}_0, \ddot{\mathbf{q}}_{\max} \Delta T^2 + 2\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_{-1}) \end{aligned} \quad (4.119)$$

Damit lässt sich das quadratische Programm bezüglich  $\mathbf{q}$  und  $p$  darstellen als

$$\min_{\{\mathbf{q}, p\}} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ p \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}} \\ -\beta \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ p \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} & -\dot{\mathbf{w}}_{\text{TCP}} \Delta T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ p \end{bmatrix} = \mathbf{J} \mathbf{q}_0 \quad (4.121)$$

und

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{\min} \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ p \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{\max} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.122)$$

Nun wird zwecks Rechenzeiteffizienz eine Koordinatentransformation durchgeführt. Mit Einführung des neuen Vektors

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}_{\min} \quad (4.123)$$

und Einsetzen in die Zielfunktion und Nebenbedingungen ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\min_{\{\mathbf{q}, p\}} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} \\ p \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{q}}_{\min} + \hat{\mathbf{d}} \\ -\beta \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} \\ p \end{bmatrix} + \text{const.} \quad (4.124)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} & -\dot{\mathbf{w}}_{\text{TCP}}\Delta T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} \\ p \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q}_0 - \hat{\mathbf{q}}_{\min}) \quad (4.125)$$

und

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} \\ p \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{\max} - \hat{\mathbf{q}}_{\min} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.126)$$

Dies ist ein quadratisches Programm der Form

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{d}^\top \mathbf{x} \quad (4.127)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (4.128)$$

und

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}. \quad (4.129)$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{d} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{d}} \\ -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{q}}_{\min} + \tilde{\mathbf{d}} \\ -\beta \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J} & -\dot{\mathbf{w}}_{\text{TCP}}\Delta T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b} &= \mathbf{J}(\mathbf{q}_0 - \hat{\mathbf{q}}_{\min}), \\ \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{\max} - \hat{\mathbf{q}}_{\min} \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.130)$$

#### 4.3.4 Robuste Inverse

Das im letzten Abschnitt aufgestellte Problem der inversen Kinematik setzt voraus, dass die JACOBI-Matrix des Endeffektors nicht singulär wird bzw. keinen Rangabfall erfährt. Bereits in der Nähe einer Singularität bereitet die JACOBI-Matrix jedoch numerische Stabilitätsprobleme.

Es existiert eine Vielzahl an Methoden zur Beherrschung der singulären Stellungen, wie beispielsweise in Deo und Walker (1995); Komainda (2003) beschrieben

wird. Darin wird das quadratische Programm gemäß Gl. (3.13) ohne Ungleichungs-Nebenbedingungen, jedoch durch hinzufügen eines zusätzlichen Terms folgendermaßen definiert:

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{d}^\top \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \mathbf{W} \mathbf{u} \quad (4.131)$$

$$\text{s. t. } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{u} \quad (4.132)$$

mit der positiv definiten Matrix  $\mathbf{G}$  und der neu eingeführten, nicht-singulären Gewichtsmatrix  $\mathbf{W}$ . Daraus folgt zunächst die LAGRANGE-Funktion

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{d}^\top \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \mathbf{W} \mathbf{u} - \boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} - \mathbf{u}). \quad (4.133)$$

Die notwendige Bedingung lautet dann

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{G} \mathbf{x} - \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (4.134)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{W} \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (4.135)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} - \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.136)$$

Die zweite Gleichung aufgelöst nach  $\mathbf{u}$  liefert

$$\mathbf{u} = -\mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} \quad (4.137)$$

mit  $\mathbf{K} = \mathbf{W}^{-1}$  und eingesetzt in die dritte

$$\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b}. \quad (4.138)$$

Damit ergibt sich das lineare Gleichungssystem zur robusten Inversen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{A}^\top \\ \mathbf{A} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{d} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (4.139)$$

Aus

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{A}^\top \\ \mathbf{A} & \mathbf{K} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{C}^\top \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

wird

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{G}^{-1} - \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}^\top (\mathbf{A} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}^\top + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{G}^{-1}, \\ \mathbf{C} &= -(\mathbf{A} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}^\top + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{G}^{-1}, \\ \mathbf{D} &= (\mathbf{A} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}^\top + \mathbf{K})^{-1}. \end{aligned}$$



Eine günstigere Alternative zur robusten Inversen bieten die Ansätze von Schlemmer (2000) und Abdel-Rahman (1991), indem die Vorwärtskinematik auf Geschwindigkeitsebene durch

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} p \quad (4.141)$$

definiert wird. Dabei stellt  $p$  das nach Schlemmer (2000) affine Manipulierbarkeitsmaß dar (Abschnitt 4.3.2). Damit ergibt sich das quadratische Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x}, p} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{d}^\top \mathbf{x} + \frac{1}{2} \alpha (1 - p)^2 \quad (4.142)$$

$$\text{s. t. } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} p. \quad (4.143)$$

Die LAGRANGE-Funktion lautet damit

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, p, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{d}^\top \mathbf{x} + \frac{1}{2} \alpha (1 - p)^2 - \boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} p). \quad (4.144)$$

und die KKT-Bedingungen entsprechend

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{G} \mathbf{x} - \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (4.145)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = \alpha (1 - p) (-1) + \mathbf{b}^\top \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (4.146)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} p = \mathbf{0} \quad (4.147)$$

Wird die zweite Gleichung nach  $p$  aufgelöst, ergibt sich zunächst

$$p = 1 - \frac{1}{\alpha} \mathbf{b}^\top \boldsymbol{\lambda} \quad (4.148)$$

und eingesetzt in die dritte Gleichung

$$\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b} \quad (4.149)$$

mit

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{b} \mathbf{b}^\top. \quad (4.150)$$

## 5 Anwendungsbeispiel 2: Regalbediengerät auf Basis einer seilgetriebenen Stewart-Gough-Plattform

Eine der wichtigsten Aufgaben der Logistikbranche ist die Lagerung von Waren aus unterschiedlichen Wirtschaftszweigen wie beispielsweise der Automobil- und Textilindustrie. Im Laufe der Zeit hat im Zuge der Massenproduktion der wachsende Materialfluss höhere Anforderungen an die Lagertechnik gestellt, so dass in zunehmendem Maße automatisierte Regalbediengeräte zum Einsatz kommen. Dadurch sind neben einer steigenden Lagerkapazität durch effizientere Raumausnutzung die Zugriffszeiten beim Ein- und Auslagern – dem sogenannten Einzel- und Doppelspiel – reduziert worden.

Einen wesentlichen Einfluss auf kurze Spielzeiten hat dabei die Dynamik, d.h. die realisierbaren Beschleunigungs- und Geschwindigkeitswerte des Regalbediengeräts während der Beförderung der Ware. Mittlerweile sind die heutigen Regalbediengeräte diesbezüglich an ihre mechanischen Grenzen gestoßen, und der stetige Aufwärtstrend von Durchsatzleistung und der Einsatz größerer Hochregale erfordert die Entwicklung technisch neuartiger Regalbediengeräte.

### 5.1 EffizienzCluster Logistik-Ruhr (ECLR)

Das Verbundprojekt „Regalbediengerät auf Basis der STEWART-GOUGH-Plattform“ aus dem Spitzencluster *EffizienzCluster Logistik-Ruhr* hat es sich zum Ziel gesetzt, einen Technologiesprung unter den Regalbediengeräten zu schaffen. Auf Grundlage der Stewart-Gough-Plattform wird ein seilbasiertes Regalbediengerät entwickelt, welches neben Leistungszuwächsen in Bezug auf Geschwindigkeit und Beschleunigung sowohl Kosten- als auch Energieeinsparungen verspricht. Diese innovativen Regalbediengeräte lassen sich dabei problemlos in bestehende Logistiksysteme integrieren und werden zunächst in kleinen und mittelständischen Unternehmen ihren Einsatz finden<sup>1,2</sup>.

Die Verwendung einer seilbasierten Stewart-Gough-Plattform ermöglicht eine Reduzierung der zu bewegenden Last, die - im Vergleich zu den klassischen Regalbediengeräten - nur ein wenig größer ist als die eigentliche Nutzlast. Im Gegensatz zum

---

<sup>1</sup>[http://www.effizienzcluster.de/de/leitthemen\\_projekte/projekt.php?proPid=36](http://www.effizienzcluster.de/de/leitthemen_projekte/projekt.php?proPid=36)

<sup>2</sup>[http://www.effizienzcluster.de/files/1/36/371\\_stewart-gough-plattform\\_produktablatt.pdf](http://www.effizienzcluster.de/files/1/36/371_stewart-gough-plattform_produktablatt.pdf)

klassischen Regalbediengerät wird das Ladegut auf einer Plattform transportiert, die über acht Seile mit acht Seilwinden verbunden ist. Eine vorgegebene Plattformbewegung wird durch entsprechende Regelung der einzelnen Seilwinden realisiert.

Ein wesentlicher Schritt zur Realisierung des Projekts ist die Modellbildung und Simulation eines virtuellen Prototyps (Abb. 5.1). Auf Grundlage mathematisch-



Abbildung 5.1: Regalbediengerät auf Basis der STEWART-GOUGH-Plattform.

physikalischer Gesetze wird anhand des virtuellen Demonstrators das dynamische Verhalten des realen Systems abgeschätzt und beurteilt und darauf aufbauend die Komponenten für den realen Prototyp ausgelegt. Zugleich wird gezielt auf die Entwicklung eines echtzeitfähigen Simulationsmodells gesetzt, welches die Grundlage für ein leistungsfähiges Regelungskonzept bildet. Im Laufe der Projektlaufzeit von fünf Jahren werden drei Prototypen aufgebaut, welche die grundlegenden Funktionen und Merkmale eines klassischen Regalbediengeräts aufweisen. Während der erste Prototyp am Lehrstuhl für Mechatronik aufgebaut wird, erfahren die beiden anderen ihren ersten industriellen Einsatz zugleich bei zwei verschiedenen mittelständischen Logistikunternehmen.

## 5.2 Modellbildung des seilbasierten Regalbediengeräts auf Basis der Stewart-Gough-Plattform

Das seilbasierte Regalbediengerät entspricht strukturell einer STEWART-GOUGH-Plattform, wobei die Linearaktuatoren, wie beispielsweise Hydraulikzylinder, durch

Seile ersetzt werden (Bruckmann 2010). Die an der Plattform befestigten Seile werden über Führungen wie beispielsweise schwenkbare Umlenkrollen an der Basis auf ihre jeweiligen Seilwinden gewickelt. Durch das koordinierte Ein- und Auswickeln aller Seile kann schließlich die Plattformbewegung realisiert werden. Eine andere Topologie eines Seilroboters, findet sich in Sturm und Schramm (2010); Bruckmann u. a. (2011), in dem die Seile mittels Linearaktuatoren eine Plattformbewegung hervorrufen. Seile können nur Zugkräfte aufnehmen, d. h. sie stellen einseitige bzw. unilaterale Bindungen dar. Daher ist es erforderlich, die Seile stets in einen verspannten Zustand zu bringen, damit auch die Plattform im Raum verspannt wird.

### 5.2.1 Kinematische Klassifizierung

Da sich der Arbeitsraum des Seilroboters durch das Hochregal definieren lässt (siehe Abb. 5.1), handelt es sich zunächst um einen ebenen Arbeitsraum, den das seilgetriebene Regalbediengerät abdecken muss. Allerdings ist der Entwurf eines rein ebenen Seilroboters nicht praktikabel, da die Plattform mitsamt der Nutzlast räumlichen Belastungen unterworfen ist. Des Weiteren wirken zusätzliche Kräfte und Momente auf die Plattform beim Be- und Entladen des Guts senkrecht zur Ebene des Hochregals. Aus diesem Grund sind Steifigkeiten quer zur eigentlichen Bewegungsrichtung der Plattform erforderlich.

Zunächst erfordert die Plattform im Wesentlichen zwei translatorische Bewegungen in der  $yz$ -Ebene (Abb. 5.2 und 5.3), gemäß der Klassifizierung nach Verhoeven (2004) auch  $2T$  bezeichnet. Des Weiteren mögen drei zusätzliche Bewegungsmöglichkeiten sinnvoll erscheinen:

- Bei hohen Beschleunigungen kann es von Vorteil sein, die Plattform während der Fahrt um einen entsprechenden Wankwinkel um die  $x$ -Achse zu neigen, damit ein Herausfliegen der losen Güter aus der offenen Kiste vermieden werden kann.
- Das Be- und Entladen der Kiste entlang der  $x$ -Achse kann unter Umständen beschleunigt werden, wenn die Plattform um einen entsprechenden Nickwinkel um die  $y$ -Achse geneigt wird.
- Beim Be- und Entladen der Kiste kann außerdem der translatorische Freiheitsgrad in  $x$ -Richtung ausgenutzt werden, damit die Plattform an das Regalfach andocken kann, um sie beim Be- und Entladevorgang stabilisieren zu können.

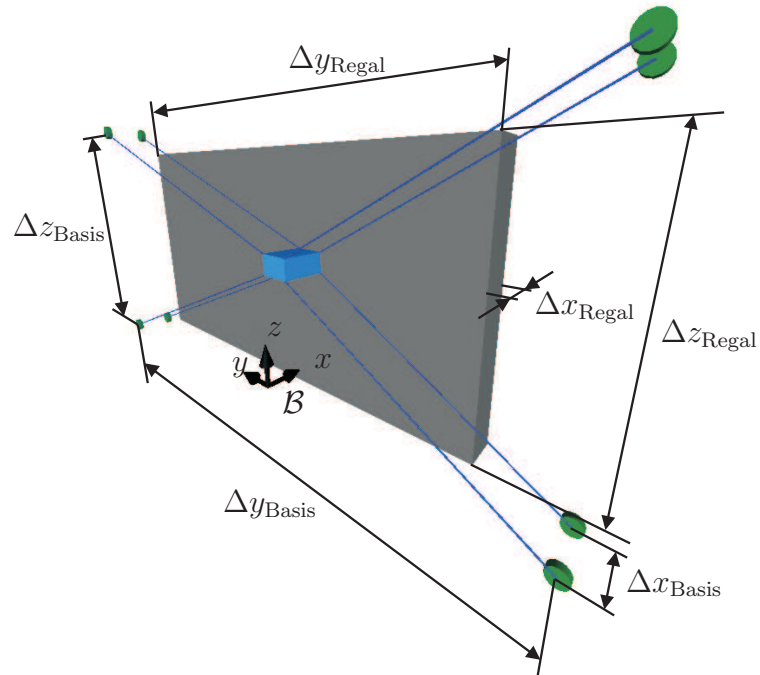


Abbildung 5.2: Topologische Struktur des Regalbediengeräts.

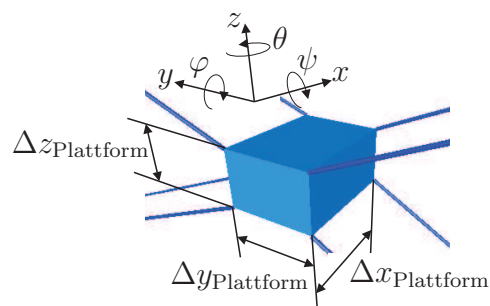


Abbildung 5.3: Topologische Struktur der Plattform.

Letztendlich muss ein  $3R3T$ -Seilroboter entworfen werden, der Kräfte und Momente in allen drei Raumkoordinaten aufnehmen kann. Sinnvollerweise wird die Plattform wie bei Hassan und Khajepour (2009) von acht Seilen angetrieben.

Die Dimensionen des für das Projekt ECLR konzipierten Prototyps eines Regalbediengeräts sind in Tab. 5.1 zusammengefasst:

Tabelle 5.1: Daten des Regalbediengeräts

$i$	Komponente $i$	$\Delta x_i$ [m]	$\Delta y_i$ [m]	$\Delta z_i$ [m]
1	Regal	0.42	8.3	4
2	Basis	0.78	9.78	4.5
3	Plattform	0.48	0.84	0.55

### 5.2.2 Konzeptionelle Gestaltungsmöglichkeiten

In diesem Abschnitt werden vorab verschiedene Designkonzepte vorgestellt, die sich auf die möglichen, unterschiedlichen Befestigungspositionen der Seile auf der Plattform beziehen. Diese haben entsprechende Vor- und Nachteile sowohl hinsichtlich der technischen Machbarkeit als auch hinsichtlich des Arbeitsraums, der das gesamte Regal abdecken muss, damit jedes Regalfach von der Plattform, unter Einhaltung technischer Anforderungen, erreicht werden kann. Letztendlich geht es darum, den Seilroboter für den vorgegebenen Arbeitsraum zu optimieren. Es existieren verschiedene Lösungsansätze, die unter anderem in Bruckmann u. a. (2009); Gouttefarde u. a. (2008); Fattah und Agrawal (2005); Hay und Snyman (2005); Fang (2005) zu finden sind. Konkrete, optimierte Designergebnisse werden in Abschnitt 5.4 vorgestellt.

Im Folgenden werden zunächst die verschiedenen Konfigurationsmöglichkeiten präsentiert und die Vor- und Nachteile miteinander verglichen:

**Konfiguration 1:** Hierbei handelt es sich um die intuitivste Form der Seilkonfiguration. Diese ist in Abb. 5.2 zu sehen und entspricht der Konfiguration nach Hassan und Khajepour (2009). Ein großer Nachteil bei dieser Seilanbindung ist der im Verhältnis zum erforderlichen Arbeitsraum sehr große, benötigte Raum für die Basispunkte, durch welche die Seile auf die Seilwinden geführt werden. Da der gesamte einzunehmende Raum des Seilroboters so kompakt wie möglich sein muss, ist gerade diese Konfiguration nicht empfehlenswert.

Aus diesem Grund eignen sich die im Folgenden vorgestellten Seilkonfigurationen, bei denen die oberen und unteren Seilanlenkpunkte „vertauscht“ sind, d. h. die Seile sind – auf die  $yz$ -Ebene projiziert – gekreuzt angeordnet.

**Konfiguration 2:** In diesem Fall sind die vorderen und hinteren Seile, d. h. bezogen auf die  $xz$ -Ebene nahezu parallel<sup>3</sup> angeordnet (Abb. 5.4). Der große Nachteil

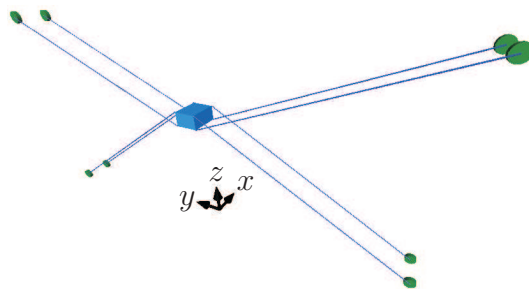


Abbildung 5.4: Möglichkeiten der Seilbefestigung: Konfiguration 2.

ist hierbei, dass der Seilroboter den Belastungen senkrecht zur  $yz$ -Ebene, die ja durchaus auf die Plattform wirken können, nicht gut entgegenwirken kann. Es existiert also keine genügend hohe Steifigkeit in  $x$ -Richtung. Im praktischen Fall wird die Plattform sehr empfindlich gegen kleine Anregungen entlang der  $x$ -Achse reagieren.

**Konfiguration 3:** Um diesem Nachteil vorzubeugen, können die vorderen und hinteren Seilanlenkpunkte vertauscht werden, so dass sich die Seile in der  $xz$ -Projektion schneiden (Abb. 5.5a). Dies führt dazu, dass auch Belastungen

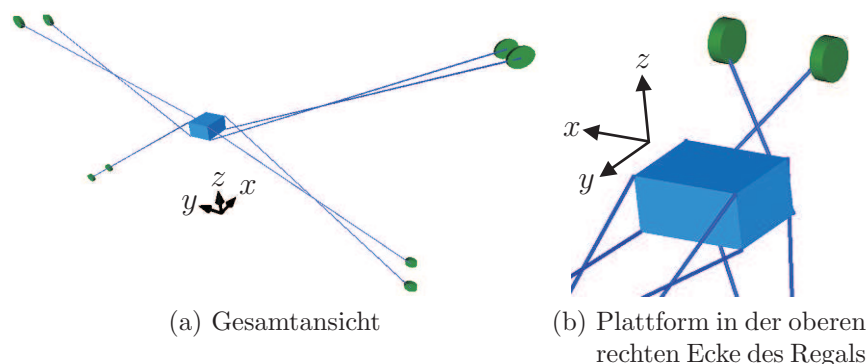


Abbildung 5.5: Möglichkeiten der Seilbefestigung: Konfiguration 3.

entlang der  $x$ -Achse entgegengewirkt werden kann. Eine Vorspannung der Seile führt letztlich auch zu einer entsprechenden Steifigkeit in  $x$ -Richtung. Jedoch

<sup>3</sup>Gemäß Tab. 5.1 ist in  $x$ -Richtung die Basis breiter als der entsprechende Abstand der Anlenkpunkte der Plattform.

müssen hierbei die Seilanlenkpunkte verschoben werden, damit die Seile nicht miteinander kollidieren können. Allerdings führt dies zu unausgeglichene Seilkraftverteilungen. Ein weiterer Nachteil sind die erforderlichen, extrem hohen Seilkräfte bei Plattform-Positionen in der Nähe der oberen linken und rechten Ecke wegen der unvorteilhaft großen Anstellwinkel der Seile (Abb. 5.5b).

**Konfiguration 4:** Diese Konfiguration stellt eine Alternative dar, welche die Nachteile der anderen Konfigurationen kompensieren kann. Dabei werden die von oben kommenden Seile parallel angeordnet mit dem unteren Rand der Plattform verbunden, während die von unten kommenden Seile mittig am oberen Rand der Plattform angeordnet werden, so dass eine Absteifung in  $x$ -Richtung möglich ist 5.6. Außerdem werden die Anstellwinkel der Seile in den oberen

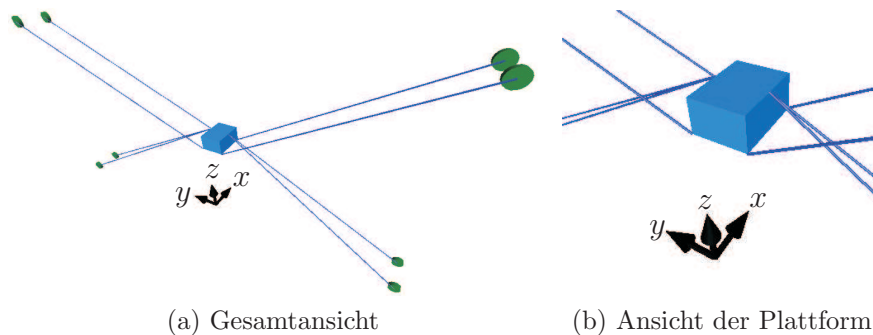


Abbildung 5.6: Möglichkeiten der Seilbefestigung; Konfiguration 4.

Eckpositionen des Regals nicht zu groß wie bei Konfiguration 3 und eine Kollision zwischen den Seilen wird verhindert. Bei dieser Konfiguration macht sich auch der Kostenfaktor bemerkbar: Die jeweils zwei unteren, nebeneinander liegenden Antriebe können durch je einen einzigen Antrieb mit zwei Ausgangswellen links und rechts ersetzt werden. Dabei können trotzdem alle sechs Freiheitsgrade der Plattform geregelt werden, wobei nur noch sechs anstatt acht Antriebe notwendig sind.

Im folgenden Abschnitt werden die Grundlagen für das Modell des hier vorliegenden Seilroboters beschrieben.



### 5.2.3 Kinematik der Plattformbewegung

Die Plattform wird zunächst als ein im dreidimensionalen Raum beliebig positionierter und orientierter Körper betrachtet, dessen körperfestes Bezugssystem  $\mathcal{P}$  durch den Ortsvektor

$${}^B\mathbf{r}_P = [x_P, y_P, z_P]^\top \quad (5.1)$$

und die Orientierung

$$\Phi = [\varphi, \theta, \psi]^\top \quad (5.2)$$

bezüglich des inertialen Basiskoordinatensystems  $\mathcal{B}$  definiert ist (Abb. 5.7). Die Pose,

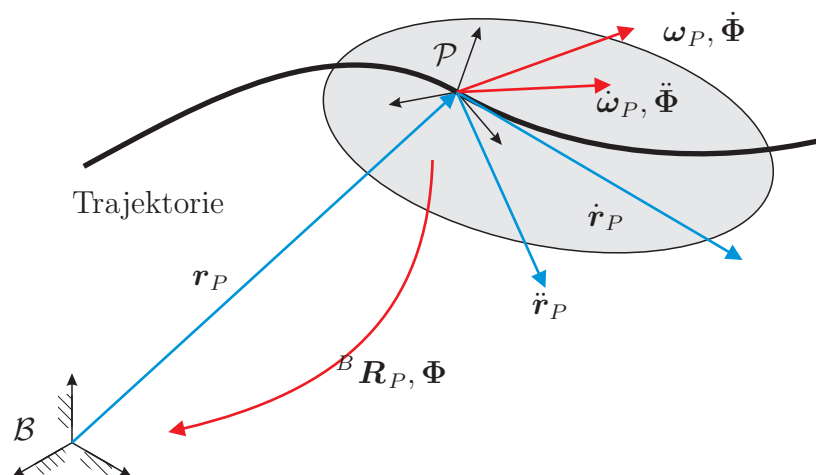


Abbildung 5.7: Bewegungsgrößen der Plattform.

d. h. Position und Orientierung der Plattform lässt sich damit zu

$$\mathbf{x}_P = [\mathbf{r}_P^\top, \Phi^\top]^\top = [x_P, y_P, z_P, \varphi, \theta, \psi]^\top \quad (5.3)$$

zusammenfassen. Sie entspricht dabei dem Vektor der verallgemeinerten Koordinaten der Plattform.

Die räumliche Drehbewegung der Plattform wird durch die Einführung der Rotationsmatrix  ${}^B\mathbf{R}_P$  beschrieben, welche Vektoren, die im körperfesten Bezugssystem  $\mathcal{P}$  dargestellt sind, ins Bezugssystem  $\mathcal{B}$  transformiert. Die Rotationsmatrix  ${}^B\mathbf{R}_P$  setzt sich dabei aus drei elementaren Rotationsmatrizen zusammen, die gemäß „roll-pitch-yaw“-Definition<sup>4</sup> (vgl. Schramm u. a. 2010a, Seite 49) in der folgenden Reihenfolge verknüpft sind:

$${}^B\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_x(\varphi), \quad (5.4)$$

<sup>4</sup>Entspricht den KARDAN-Winkeln und ist in der Fahrzeugtechnik eine gängige Beschreibung der räumlichen Drehbewegung. Die Anwendung von EULER-Winkeln wäre auch möglich gewesen, wobei der Unterschied in der Wahl der Koordinatenachsen für die einzelnen Teildrehungen liegt (Schramm u. a. 2010a).

mit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_x(\varphi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{R}_y(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{R}_z(\psi) &= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

wobei

- $\varphi$  : Rollwinkel um die  $x$ -Achse, engl. roll angle,
- $\theta$  : Nickwinkel um die  $y$ -Achse, engl. pitch angle,
- $\psi$  : Gierwinkel um die  $z$ -Achse, engl. yaw angle.

Die zeitlichen Ableitungen des Vektors der verallgemeinerten Koordinaten liefern

$${}^B \dot{\mathbf{x}}_P = [\dot{x}_P, \dot{y}_P, \dot{z}_P, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^\top, \tag{5.6}$$

$${}^B \ddot{\mathbf{x}}_P = [\ddot{x}_P, \ddot{y}_P, \ddot{z}_P, \ddot{\varphi}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi}]^\top. \tag{5.7}$$

Des Weiteren ist der Zusammenhang zwischen den zeitlichen Ableitungen der KARDAN-Winkel  $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$  und der Winkelgeschwindigkeit der Plattform  $\boldsymbol{\omega}_P$  relativ zum Inertialsystem  $\mathcal{B}$  erforderlich, welcher mit Hilfe der kinematischen KARDAN-Gleichungen (Schramm u. a. 2010a, Seite 49) bestimmt werden kann. Die Winkelgeschwindigkeit der Plattform lässt sich aus der Summe der elementaren Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\varphi}, \dot{\theta}$  und  $\dot{\psi}$  berechnen und lautet

$$\boldsymbol{\omega}_P = \dot{\varphi} + \dot{\theta} + \dot{\psi}. \tag{5.8}$$

Für die folgenden Schritte ist die Darstellung der Drehbewegung der Plattform im raumfesten Bezugssystem  $\mathcal{B}$  erforderlich:

$$\begin{aligned}
{}^B\boldsymbol{\omega}_P &= \dot{\varphi} {}^B\mathbf{e}_{x_2} + \dot{\theta} {}^B\mathbf{e}_{y_1} + \dot{\psi} {}^B\mathbf{e}_{z_0} \\
&= \dot{\varphi} \mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_x(\varphi) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta} \mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{R}_y(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\psi} \mathbf{R}_z(\psi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \dot{\varphi} \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta \\ \sin \psi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\psi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi & 0 \\ -\sin \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{H} \dot{\boldsymbol{\Phi}}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Daraus ergibt sich die Darstellung der Winkelbeschleunigung im Inertialsystem  $\mathcal{B}$  gemäß

$$\begin{aligned}
{}^B\dot{\boldsymbol{\omega}}_P &= \mathbf{H} \ddot{\boldsymbol{\Phi}} + \dot{\mathbf{H}} \dot{\boldsymbol{\Phi}} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi & 0 \\ -\sin \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \psi \cos \theta - \dot{\theta} \cos \psi \sin \theta & -\dot{\psi} \cos \psi & 0 \\ \dot{\psi} \cos \psi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \psi \sin \theta & -\dot{\psi} \sin \psi & 0 \\ -\dot{\theta} \cos \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi & 0 \\ -\sin \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} -\cos \psi & -\sin \psi \cos \theta & -\cos \psi \sin \theta \\ -\sin \psi & \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \sin \theta \\ 0 & 0 & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} \dot{\theta} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

### 5.2.4 Inverse Kinematik

Die inverse Kinematik ermittelt aus einer vorgegebenen Pose des Endeffektors die dafür erforderlichen Gelenkvariablen (de Wit u. a. 1996). Gerade für parallele Roboter, wie in diesem Fall für Seilroboter, ist die inverse Kinematik analytisch lösbar, d. h. es existiert eine geschlossene, nichtlineare Abbildung  $\mathbf{f}_{\text{IK}} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die den Raum der Endeffektorkoordinaten in den Raum der Gelenkkoordinaten transformiert:

$$\mathbf{s}_l = \mathbf{f}_{\text{IK}}(\mathbf{x}_P), \tag{5.11}$$

wobei

$\mathbf{x}_P \in \mathbb{R}^m$  : Endeffektorkoordinaten bzw. Pose der Plattform, Gl. (5.3),

$\mathbf{s}_l \in \mathbb{R}^n$  : Gelenkkoordinaten bzw. Vektor der Seillängen,

$m$  : Anzahl der Plattform-Freiheitsgrade,

$n$  : Anzahl der Seile.

Zur Aufstellung der inversen Kinematik muss Folgendes beachtet werden:

- Da im vorigen Abschnitt bereits erwähnt wurde, dass Seile nur Zugkräfte aufnehmen können, wird die Annahme getroffen, dass sie bei der Modellbildung stets verspannt sind. Daraus folgt, dass lose hängende Seile nicht erlaubt sind.
- Es existieren zwei Möglichkeiten der Modellierung von Seilführungen:
  1. Es wird vereinfacht angenommen, dass die Seile von den Seilwinden über fixe, punktförmige Führungen mit der Plattform verbunden sind. In diesem Fall sind die Vektoren  $\mathbf{b}_i$  zu den Führungspunkten  $B_i$  an der Basis konstant, siehe dazu Abb. 5.8. Diese Näherung ist legitim, soweit beispielsweise keramische Augen als Seilführungen verwendet werden. Ein praktischer Nachteil dabei liegt in dem hohen Verschleiß und der verkürzten Lebensdauer der Seile aufgrund der Reibung zwischen Seil und fixer Führung (Bruckmann 2010).
  2. Unter Verwendung von rollenbasierten Seilführungen, wie beispielsweise schwenkbaren Umlenkrollen, kann dieser Nachteil vermieden werden. Allerdings gestaltet sich die kinematische Modellierung als schwieriger, da zusätzliche geometrische Bindungen berücksichtigt werden müssen. Des Weiteren kann die Drehträgheit der Seilrollen die Dynamik des Gesamtsystems beeinträchtigen.

Die folgenden zwei Abschnitte erläutern die Modellbildung der inversen Kinematik unter Berücksichtigung beider Arten von Seilführungen:

### Punktförmige Seilführungen

Gemäß Abb. 5.8 gilt für  $1 \leq i \leq n$ , wobei  $n$  die Anzahl der Seile ist, der Vektorzug

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{b}_i - (\mathbf{r}_P + {}_P\mathbf{r}_i). \quad (5.12)$$

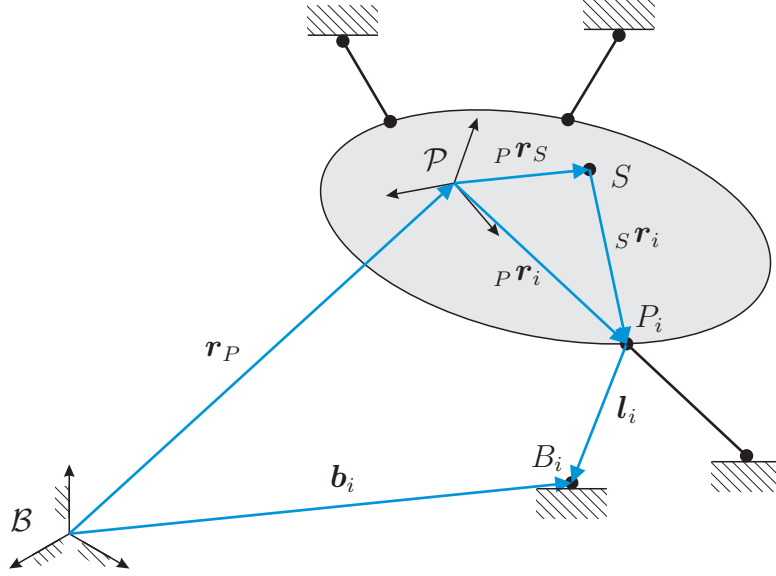


Abbildung 5.8: Kinematik der Plattform eines Seilroboters unter Berücksichtigung punktförmiger Seilführungen.

Auf Geschwindigkeitsebene ergibt sich entsprechend durch zeitliche Ableitung

$$\dot{\mathbf{l}}_i = -(\dot{\mathbf{r}}_P + \boldsymbol{\omega}_P \times {}_P \mathbf{r}_i) \quad (5.13)$$

und auf Beschleunigungsebene

$$\ddot{\mathbf{l}}_i = -(\ddot{\mathbf{r}}_P + \dot{\boldsymbol{\omega}}_P \times {}_P \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega}_P \times (\boldsymbol{\omega}_P \times {}_P \mathbf{r}_i)). \quad (5.14)$$

Mit dieser Kenntnis kann schließlich die Länge des  $i$ -ten Seils bestimmt werden. Diese ergibt sich aus

$$l_i = \|\mathbf{l}_i\|_2 = \sqrt{\mathbf{l}_i^2}. \quad (5.15)$$

Die Längenänderung (Seilgeschwindigkeit) wird aus der zeitlichen Ableitung von Gl. (5.15) ermittelt, so dass

$$\dot{l}_i = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{l}_i^2}} \cdot 2\mathbf{l}_i^\top \dot{\mathbf{l}}_i = \frac{\mathbf{l}_i^\top \dot{\mathbf{l}}_i}{l_i} \quad (5.16)$$

gilt. Die Seilbeschleunigung ergibt sich gemäß

$$\ddot{l}_i = \frac{\dot{\mathbf{l}}_i^\top \dot{\mathbf{l}}_i + \mathbf{l}_i^\top \ddot{\mathbf{l}}_i}{l_i} - \frac{(\mathbf{l}_i^\top \dot{\mathbf{l}}_i)^2}{l_i^3}. \quad (5.17)$$

Die konkrete Berechnung der inversen Kinematik erfordert die Wahl eines Koordinatensystems, in dem die Vektoren referenziert sind. Für die kommenden Schritte ist

es sinnvoll, die Vektoren im raumfesten Koordinatensystem  $\mathcal{B}$  darzustellen. Daraus folgt auf Positionsebene für den Vektorzug aus Gl. (5.12)

$$\begin{aligned} {}^B \mathbf{l}_i &= {}^B \mathbf{b}_i - ({}^B \mathbf{r}_P + {}^B \mathbf{R}_P {}^P \mathbf{r}_i) \\ &= {}^B \mathbf{b}_i - ({}^B \mathbf{r}_P + {}^B_P \mathbf{r}_i) \\ &= {}^B \mathbf{b}_i - {}^B \mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (5.18)$$

mit

$${}^B_P \mathbf{r}_i = {}^B \mathbf{R}_P {}^P \mathbf{r}_i, \quad (5.19)$$

$${}^B \mathbf{r}_i = {}^B \mathbf{r}_P + {}^B_P \mathbf{r}_i. \quad (5.20)$$

Auf Geschwindigkeitsebene ergibt sich entsprechend

$${}^B \dot{\mathbf{l}}_i = - ({}^B \dot{\mathbf{r}}_P + {}^B \boldsymbol{\omega}_P \times {}^B_P \mathbf{r}_i) \quad (5.21)$$

und auf Beschleunigungsebene

$${}^B \ddot{\mathbf{l}}_i = - ({}^B \ddot{\mathbf{r}}_P + {}^B \dot{\boldsymbol{\omega}}_P \times {}^B_P \mathbf{r}_i + {}^B \boldsymbol{\omega}_P \times ({}^B \boldsymbol{\omega}_P \times {}^B_P \mathbf{r}_i)), \quad (5.22)$$

mit

$${}^B \boldsymbol{\omega}_P = \mathbf{H} \boldsymbol{\Phi}$$

$${}^B \dot{\boldsymbol{\omega}}_P = \mathbf{H} \ddot{\boldsymbol{\Phi}} + \dot{\mathbf{H}} \dot{\boldsymbol{\Phi}}$$

aus Gl. (5.9) und Gl. (5.10).

## Rollenbasierte Seilführungen

Der Prototyp des Regalbediengeräts erfordert wegen der vorab erwähnten Gründe die Verwendung von rollenbasierten Seilführungen, konkret von schwenkbaren Umlenkrollen, wie sie in Abb. 5.9 dargestellt sind. Aufgrund dessen ist es notwendig, die Kinematik des Seilroboters unter Berücksichtigung der Umlenkrollen aufzustellen. In Abb. 5.9 werden die dafür definierten Koordinatensysteme eingeführt. Eine Besonderheit ist die in Abb. 5.9a dargestellte Neigung der Umlenkrolle um den festgelegten Winkel  $\gamma$  um die  $x$ -Achse, der konstruktionsbedingt berücksichtigt werden muss, damit das Seil sauber auf die Motorwinde gewickelt werden kann. Die für die Koordinatentransformation vom Umlenkrollen-Bezugssystem  $\mathcal{U}$  ins Inertialsystem  $\mathcal{B}$  benötigte Rotationsmatrix ist dementsprechend  ${}^B \mathbf{R}_{\mathcal{U}}(x, \gamma)$ . Der Schwenkwinkel  $\beta$  wird in Abb. 5.9b definiert und erlaubt eine Rotation der Rolle um die  $z$ -Achse

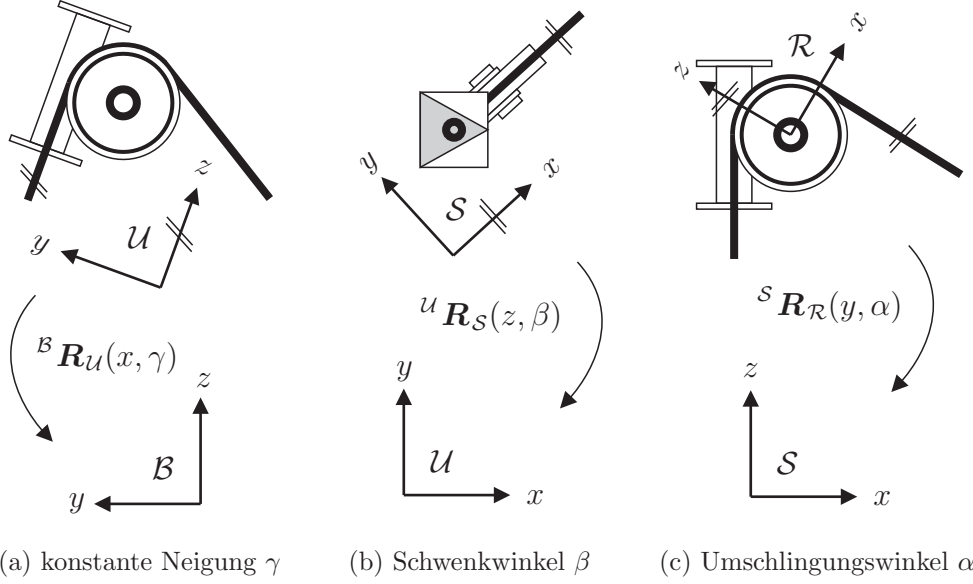


Abbildung 5.9: Rollenbasierte Seilführung mit Hilfe einer schwenkbaren Umlenkrolle mit Definition des Neigungs-, Schwenk- und Rollwinkels anhand von Inertial-, Umlenkrollen-, Schwenk- und Roll-Koordinatensystem  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{R}$ .

mit Hilfe der Rotationsmatrix  ${}^{\mathcal{U}}\mathbf{R}_{\mathcal{S}}(z, \beta)$ . Des Weiteren wird der Umschlingungswinkel  $\alpha$  für den Drehfreiheitsgrad der Rolle um die  $y$ -Achse und die entsprechende Rotationsmatrix  ${}^{\mathcal{S}}\mathbf{R}_{\mathcal{R}}(y, \alpha)$  eingeführt (Abb. 5.9c).

Mit Hilfe von Abb. 5.10 wird die Kinematik der Plattform unter Berücksichtigung der rollenbasierten Seilführung aufgestellt. Der Punkt  $B$  stellt sowohl den Austrittspunkt des Seils als auch den Bezugspunkt der Umlenkrolle mit Radius  $\varrho$  dar, durch den die geneigte Schwenkachse führt. Der Drehpunkt der Rolle befindet sich in Punkt  $M$ . Das Seil ist auf der Plattform im Punkt  $P$  befestigt bzw. drehbar gelagert und wird tangential über den Berührungspunkt  $T$  auf die Rolle geführt und umgelenkt. Die Kinematik der rollenbasierten Seilführung gilt für alle  $i = 1, \dots, n$  Seile, jedoch wird aus Gründen der Übersichtlichkeit auf die Indizierung verzichtet.

Zunächst wird der Differenzvektor der Strecke  $\overline{PB}$  durch den einfachen Vektorzug

$${}^P\mathbf{r}_B = \mathbf{b} - \mathbf{p} \quad (5.23)$$

beschrieben. Der Anteil des Seils auf dem Streckenabschnitt  $\overline{PT}$  ergibt sich dann zu

$${}^P\mathbf{r}_T = {}^P\mathbf{r}_B + {}^B\mathbf{r}_M + {}^M\mathbf{r}_T. \quad (5.24)$$

Die Umlenkrolle hat die kinematische Zwangsbedingung, dass die in 5.24 vorkommenden Vektoren stets in der Schwenkebene der Umlenkrolle liegen. Dies ist gleich-





da das freiliegende Seil  ${}_P\mathbf{r}_T$  stets tangential auf die Rolle geführt wird und senkrecht auf dem Streckenabschnitt  ${}_M\mathbf{r}_T$  liegt. Einsetzen von Gl. (5.24) in Gl. (5.27) liefert

$$\begin{aligned}
 & {}_M\mathbf{r}_T^\top \cdot ({}_P\mathbf{r}_B + {}_B\mathbf{r}_M + {}_M\mathbf{r}_T) & = 0 \\
 \Leftrightarrow & {}_M\mathbf{r}_T^\top \cdot {}_P\mathbf{r}_B + \underbrace{{}_M\mathbf{r}_T^\top \cdot {}_B\mathbf{r}_M}_{\varrho^2 \cos \alpha} + \underbrace{{}_M\mathbf{r}_T^\top \cdot {}_M\mathbf{r}_T}_{\varrho^2} & = 0 \\
 \Leftrightarrow & {}_M\mathbf{r}_T^\top \cdot {}_P\mathbf{r}_B + \varrho^2 \cos \alpha + \varrho^2 & = 0. \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

Damit kann nun die Kinematik explizit aufgestellt werden, indem die folgenden Gleichungen beispielsweise im Schwenk-Koordinatensystems  $\mathcal{S}$  ausgedrückt werden. Der Differenzvektor  ${}^{\mathcal{B}}\mathbf{r}_B$  ist im Basiskoordinatensystem  $\mathcal{B}$  referenziert, so dass folgende Transformation benötigt wird:

$${}^{\mathcal{S}}\mathbf{r}_B = {}^{\mathcal{U}}\mathbf{R}_{\mathcal{S}}^\top(z, \theta) \cdot {}^{\mathcal{B}}\mathbf{R}_{\mathcal{U}}^\top(x, \gamma) \cdot {}^{\mathcal{B}}\mathbf{r}_B. \tag{5.29}$$

Außerdem gilt, dass

$${}_M\mathbf{r}_T = \varrho \cdot {}^{\mathcal{S}}\mathbf{R}_{\mathcal{R}}(y, \alpha) \cdot {}^{\mathcal{R}}\mathbf{e}_x. \tag{5.30}$$

Einzig der Vektor vom Bezugspunkt  $B$  der Umlenkrolle zur Drehachse  $M$  ist im Koordinatensystem  $\mathcal{S}$  beschrieben und lautet

$${}_B\mathbf{r}_M = \varrho \cdot {}^{\mathcal{S}}\mathbf{e}_x. \tag{5.31}$$

Einsetzen der Vektoren in Gl. (5.26) liefert zunächst die erste Zwangsbedingung

$$[({}^{\mathcal{B}}\mathbf{b}_y - {}^{\mathcal{B}}\mathbf{p}_y) \cos \gamma + ({}^{\mathcal{B}}\mathbf{b}_z - {}^{\mathcal{B}}\mathbf{p}_z) \sin \gamma] \cos \theta - ({}^{\mathcal{B}}\mathbf{b}_x - {}^{\mathcal{B}}\mathbf{p}_x) \sin \beta = 0 \tag{5.32}$$

und aufgelöst nach dem Schwenkwinkel

$$\beta = \arctan \frac{({}^{\mathcal{B}}\mathbf{b}_y - {}^{\mathcal{B}}\mathbf{p}_y) \cos \gamma + ({}^{\mathcal{B}}\mathbf{b}_z - {}^{\mathcal{B}}\mathbf{p}_z) \sin \gamma}{{}^{\mathcal{B}}\mathbf{b}_x - {}^{\mathcal{B}}\mathbf{p}_x}. \tag{5.33}$$

Ohne Neigung der Umlenkrolle ( $\gamma = 0$ ) vereinfacht sich der Schwenkwinkel  $\beta$  aus Gl. (5.33) zu

$$\beta = \arctan \frac{{}^{\mathcal{B}}\mathbf{b}_y - {}^{\mathcal{B}}\mathbf{p}_y}{{}^{\mathcal{B}}\mathbf{b}_x - {}^{\mathcal{B}}\mathbf{p}_x} \tag{5.34}$$

und entspricht dem in Bruckmann (2010) hergeleiteten Ausdruck (unter Berücksichtigung einer entsprechenden Koordinatentransformation).

Aus Gl. (5.27) ergibt sich nach einigen Äquivalenzumformungen die zweite Zwangsbedingung

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha + \varrho = 0, \quad (5.35)$$

mit

$$\begin{aligned} a &= ({}^B\mathbf{b}_x - {}^B\mathbf{p}_x) \cos \beta + [({}^B\mathbf{b}_y - {}^B\mathbf{p}_y) \cos \gamma + ({}^B\mathbf{b}_z - {}^B\mathbf{p}_z) \sin \gamma] \sin \beta + \varrho, \\ b &= ({}^B\mathbf{b}_y - {}^B\mathbf{p}_y) \sin \gamma - ({}^B\mathbf{b}_z - {}^B\mathbf{p}_z) \cos \gamma. \end{aligned}$$

Gl. (5.35) entspricht einer quadratischen Gleichung mit den beiden Lösungen

$$\alpha_{1,2} = \text{atan2} \left( \pm \frac{a \sqrt{b^2 (a^2 + b^2 - \varrho^2)} - \varrho b^2}{(a^2 + b^2) b}, \frac{-\varrho a \mp \sqrt{b^2 (a^2 + b^2 - \varrho^2)}}{a^2 + b^2} \right). \quad (5.36)$$

Die beiden Lösungen aus Gl. (5.36) lassen sich anhand Abb. 5.11 erklären. Das

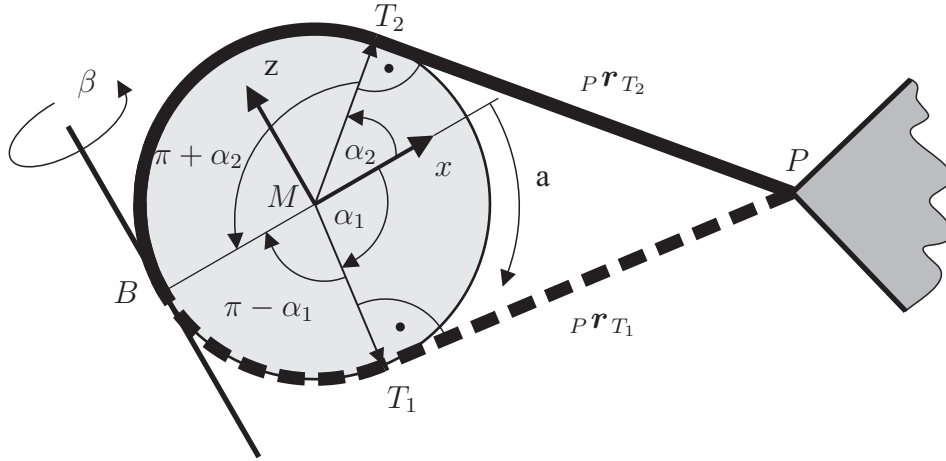


Abbildung 5.11: Lösungen der quadratischen Gleichung.

Seil kann entweder gegen den Uhrzeigersinn (schwarz, von  $P$  über  $T_2$  nach  $B$ ) oder im Uhrzeigersinn (gestrichelt, von  $P$  über  $T_1$  nach  $B$ ) um die Rolle gewickelt werden. Dementsprechend müssen auch die Kreissegmente von  $T_1$  bzw.  $T_2$  nach  $B$  berücksichtigt werden, wobei die positive Drehrichtung von  $\alpha$  im Uhrzeigersinn ist. Aus gegebenen technischen Gründen gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{4}$  und  $-\frac{\pi}{4} < \alpha_2 < 0$ . Mit  $\|{}_P\mathbf{r}_T\|_2 = \|{}_P\mathbf{r}_{T_1}\|_2 = \|{}_P\mathbf{r}_{T_2}\|_2$  ergibt sich die Gesamtlänge des Seils von  $P$  nach  $B$  dann zu

$$l_{\text{ges}} = \|{}_P\mathbf{r}_T\|_2 + \begin{cases} \varrho(\pi - \alpha_1), & \text{Seil ist „unter“ der Rolle gewickelt,} \\ \varrho(\pi + \alpha_2), & \text{Seil ist „auf“ der Rolle gewickelt.} \end{cases} \quad (5.37)$$

Für die in Abschnitt 5.2.6 aufzustellenden Bewegungsgleichungen werden die Wirkrichtungen der Seilkräfte an den Seilbefestigungen der Plattform benötigt. Diese entsprechen den Richtungsvektoren  ${}^P\mathbf{r}_T$ , bevor sie von den Umlenkrollen Umgelenkt werden, so dass schließlich für rollenbasierte Seilführungen  $\mathbf{l} = {}^P\mathbf{r}_T$  gilt.

Abb. 5.12 stellt das in DYMOLA<sup>5</sup> modellierte, objektorientierte Regalbediengerät unter Berücksichtigung der (in grün unterlegten) rollenbasierten Seilführung dar. Die Trajektorie des Plattform-Bezugspunkt ist (blau)-farbig unterlegt<sup>6</sup>. Die für die

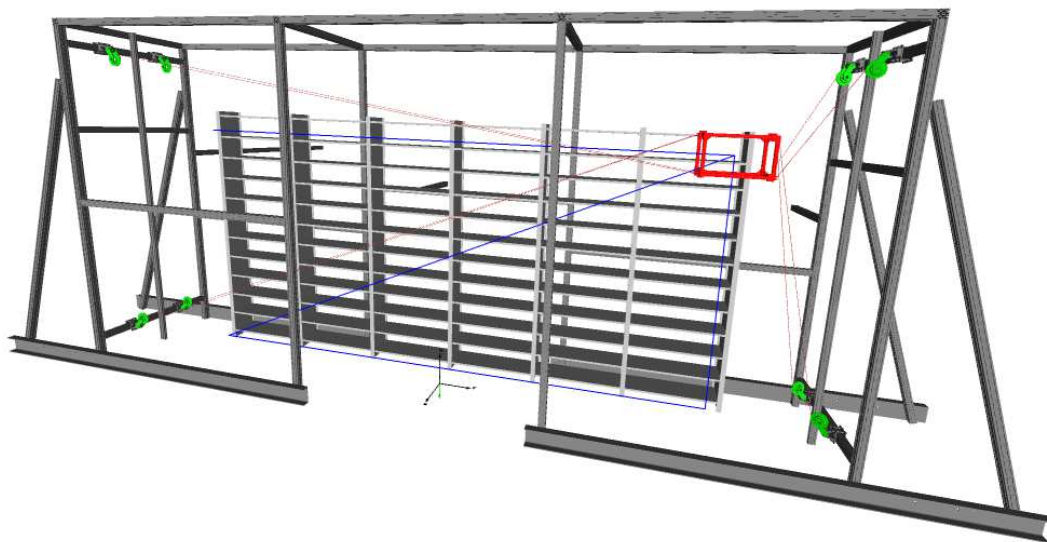


Abbildung 5.12: Visualisierung des objektorientierten Modells des Regalbediengeräts unter Berücksichtigung rollenbasierter Seilführungen in DYMOLA (siehe Tiller 2001; Fritzson 2004). Die CAD-Daten aller Objekte (z. B. Plattform, Umlenkrollen) entstanden mit freundlicher Unterstützung der Professur „Rechnereinsatz in der Konstruktion“ der Universität Duisburg-Essen.

se Trajektorie bestimmten Größen Schwenkwinkel  $\theta$ , Umschlingungswinkel  $\alpha$  und Seillänge  $l_{\text{ges}}$  gemäß Gl. (5.33), (5.36) und (5.37) werden in Abb. 5.13 dargestellt.

### 5.2.5 Vorwärtskinematik

Die Vorwärtskinematik des seilbasierten Parallelroboters ist im Gegensatz zur inversen Kinematik nur in bestimmten Fällen eindeutig lösbar und im Allgemeinen kompliziert (Bruckmann 2010; Taghirad und Nahon 2007; Husty u. a. 2002). Für

<sup>5</sup>Simulationsumgebung zur Modellbildung und Simulation in der objektorientierten Modellierungssprache MODELICA (siehe Fritzson 2004; Tiller 2001)

<sup>6</sup>Das Thema Trajektorienplanung wird in Abschnitt 5.5 eingehend erläutert.

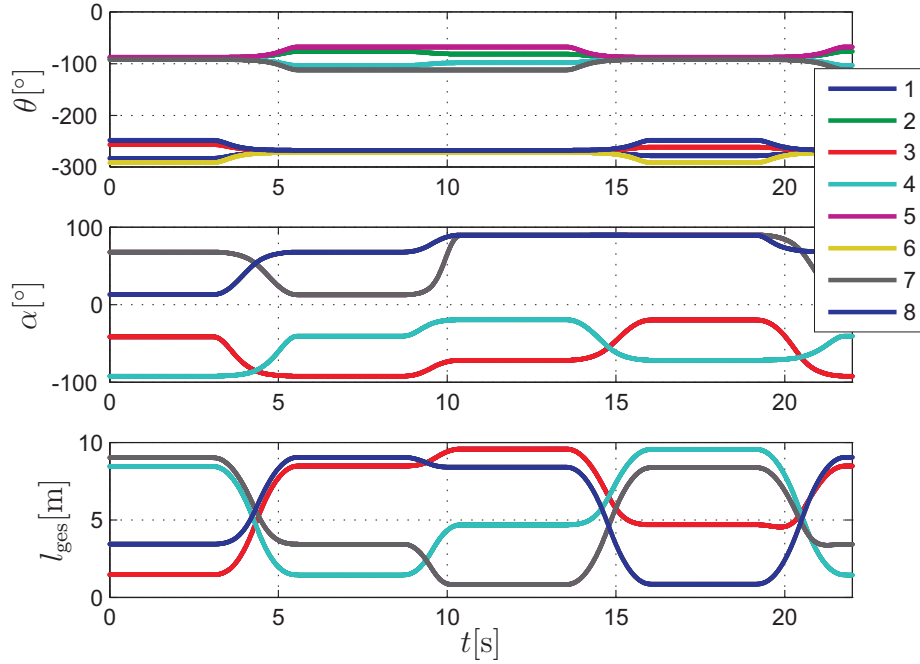


Abbildung 5.13: Schwenkwinkel  $\theta$ , Umschlingungswinkel  $\alpha$  und Seillänge  $l_{\text{ges}}$  aller acht Seile der Trajektorie unter Berücksichtigung der rollenbasierten Seilführung.

den Fall des seilbasierten Regalbediengeräts unter Verwendung von rollenbasierten Seilführungen muss ein iteratives Lösungsverfahren verwendet werden, welches die nichtlineare Vorwärtskinematik gemäß

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{f}_{\text{IK}}^{-1}(\mathbf{s}_l) = \mathbf{f}_{\text{VK}}(\mathbf{s}_l) \quad (5.38)$$

bestimmt, vgl. dazu Gl. (5.11). Konkret muss gemäß Gl. (5.37) bei bekannten  $l_{\text{ges},i}$ ,  $1 \leq i \leq m$  nach der unbekannten Pose der Plattform  $\mathbf{x}_P$  umgestellt werden. Ein iteratives Verfahren ist beispielsweise in Williams u. a. (2004) zu finden, in dem unter Vernachlässigung der Schwenkwinkel die Gleichungen vereinfacht werden. In Merlet (2004) wird ein iteratives Verfahren vorgestellt, welches auf Intervallarithmetik basiert und garantiert alle möglichen Lösungen der Vorwärtskinematik präsentiert (Bruckmann 2010). Die Vorwärtskinematik wird in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt, stattdessen auf weiterführende Literatur verwiesen, z. B. Merlet (2008); Bruckmann (2010); Bruckmann u. a. (2008a, b).

### 5.2.6 Bewegungsgleichungen der Plattform

Zur Bestimmung der räumlichen Bewegungsgleichungen des Seilroboters werden Impuls- und Drallsatz der Plattform bezüglich des Massenmittelpunktes  $S$  benötigt,

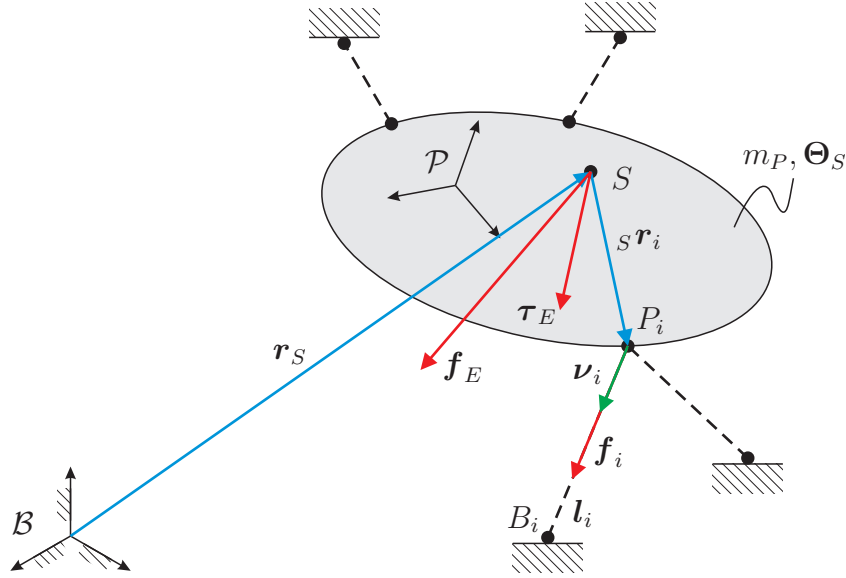


Abbildung 5.14: Zum Impuls- und Drallsatz der Plattform bezüglich des Schwerpunkts  $S$ .

siehe dazu Abb. 5.14. Die Plattform habe die Masse  $m_P$  und den Trägheitstensor  $\Theta_S$  bezüglich des Schwerpunkts. Impuls- und Drallsatz ergeben sich aus dem Freischnitt der Plattform durch die  $1 \leq i \leq n$  Seile und lauten

$$\begin{aligned} m_P \ddot{\mathbf{r}}_S &= \mathbf{f}_E + \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i, \\ \Theta_S \dot{\boldsymbol{\omega}}_P + \boldsymbol{\omega}_P \times (\Theta_S \boldsymbol{\omega}_P) &= \boldsymbol{\tau}_E + \sum_{i=1}^n {}_S \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Dabei sind  $\mathbf{f}_E$  und  $\boldsymbol{\tau}_E$  eingeprägte Kräfte und Momente, die auf den Massenmittelpunkt der Plattform wirken. Die aus dem Freischnitt resultierenden Reaktionskräfte  $\mathbf{f}_i$  wirken auf die Plattform entlang der Seilrichtungen  $\boldsymbol{\nu}_i$  und entsprechen betragsmäßig den skalaren Seilkräften  $f_i$ , so dass folgender Zusammenhang gilt:

$$\mathbf{f}_i = f_i \boldsymbol{\nu}_i, \quad (5.40)$$

wobei

$$\boldsymbol{\nu}_i = \frac{\mathbf{l}_i}{\|\mathbf{l}_i\|_2} = \frac{\mathbf{l}_i}{l_i} \quad (5.41)$$

dem normierten Vektor der Seilrichtung entspricht und mit Hilfe der inversen Kinetik aus Abschnitt 5.2.4 bestimmt werden kann.

Nach dem Einsetzen von Gl. (5.40) in den Impuls- und Drallsatz (5.39) ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} m_P \ddot{\mathbf{r}}_S &= \mathbf{f}_E + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\nu}_i f_i, \\ \Theta_S \dot{\boldsymbol{\omega}}_P + \boldsymbol{\omega}_P \times (\Theta_S \boldsymbol{\omega}_P) &= \boldsymbol{\tau}_E + \sum_{i=1}^n ({}_S \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\nu}_i) f_i. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Indem die skalaren Seilkräfte  $f_i$  mit  $1 \leq i \leq n$  zum Vektor  $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]^\top$  zusammengefasst werden, lässt sich Gl. (5.42) in folgende Form bringen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_P \ddot{\mathbf{r}}_S \\ \Theta_S \dot{\boldsymbol{\omega}}_P + \boldsymbol{\omega}_P \times (\Theta_S \boldsymbol{\omega}_P) \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_{\text{dyn}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_1 & \dots & \boldsymbol{\nu}_n \\ {}_S \mathbf{r}_1 \times \boldsymbol{\nu}_1 & \dots & {}_S \mathbf{r}_n \times \boldsymbol{\nu}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^\top} \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_E \\ \boldsymbol{\tau}_E \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}} \quad (5.43)$$

mit

- $\mathbf{A}^\top \in \mathbb{R}^{m \times n}$  : Strukturmatrix,
- $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  : Vektor der Seilkraftverteilung,
- $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$  : Vektor der eingprägten Kräfte und Momente,
- $m$  : Anzahl der Plattform-Freiheitsgrade,
- $n$  : Anzahl der Seile.

Ist beispielsweise die Schwerkraft die einzige eingprägte Kraft, die auf die Plattform wirkt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_E &= m_P \mathbf{g}, \\ \boldsymbol{\tau}_E &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

wobei  $\mathbf{g}$  der Vektor der Erdbeschleunigung ist.

Werden die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsterme von Gl. (5.43) zu Null gesetzt, lässt sich das Kräfte- und Momentengleichgewicht der Plattform bezüglich des Schwerpunkts  $S$  bestimmen:

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{f} + \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (5.45)$$

Im Allgemeinen liegen die Konstruktionsdaten der Plattform – wie beispielsweise die Vektoren  ${}_P \mathbf{r}_i$  zu den Seilanlenkpunkten  $P_i$  der Plattform (Abb. 5.8) und der Schwerpunktsvektor  ${}_P \mathbf{r}_S$  – relativ zum Ursprung des körperfesten Bezugssystems

$\mathcal{P}$  vor und werden auch darin aufgelöst. Des Weiteren ist es sinnvoll, die Plattformtrajektorien (siehe Abschnitt 5.5) auf den Bezugspunkt  $\mathcal{P}$  zu beziehen (siehe Abb. 5.7). Aus diesem Grund werden nun die Bewegungsgleichungen (5.43) relativ zum Ursprung des körperfesten Bezugssystems  $\mathcal{P}$  bestimmt. Anhand Abb. 5.8 lässt sich die Position des Schwerpunkts durch den Vektorzug

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{r}_P + {}_P\mathbf{r}_S. \quad (5.46)$$

beschreiben. Mit den Gesetzen der Kinematik der Relativbewegung (Schramm u. a. 2010a) berechnen sich die zeitlichen Ableitungen der Schwerpunkt-Position zu

$$\dot{\mathbf{r}}_S = \dot{\mathbf{r}}_P + \boldsymbol{\omega}_P \times {}_P\mathbf{r}_S \quad (5.47)$$

und

$$\ddot{\mathbf{r}}_S = \ddot{\mathbf{r}}_P + \dot{\boldsymbol{\omega}}_P \times {}_P\mathbf{r}_S + \boldsymbol{\omega}_P \times (\boldsymbol{\omega}_P \times {}_P\mathbf{r}_S). \quad (5.48)$$

Dabei ist die Winkelgeschwindigkeit und -Beschleunigung des Schwerpunkts identisch mit der Winkelgeschwindigkeit und -Beschleunigung des Bezugspunkts  $\mathcal{P}$ , da die Plattform als starrer Körper angenommen wird.

Nach dem Einsetzen von Gl. (5.48) in Gl. (5.43) ergeben sich die Bewegungsgleichungen ausgedrückt bezüglich des Ursprungs von  $\mathcal{P}$  zu

$$\begin{bmatrix} m_P (\ddot{\mathbf{r}}_P + \dot{\boldsymbol{\omega}}_P \times {}_P\mathbf{r}_S + \boldsymbol{\omega}_P \times (\boldsymbol{\omega}_P \times {}_P\mathbf{r}_S)) \\ \boldsymbol{\Theta}_S \dot{\boldsymbol{\omega}}_P + \boldsymbol{\omega}_P \times (\boldsymbol{\Theta}_P \boldsymbol{\omega}_P) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^\top \mathbf{f} + \mathbf{w}. \quad (5.49)$$

Nun muss in der oberen Gleichung von Gl. (5.49) die Winkelbeschleunigung der Plattform  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_P$  isoliert werden. Zu diesem Zweck wird folgender Zusammenhang ausgenutzt:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_P \times {}_P\mathbf{r}_S = -{}_P\mathbf{r}_S \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_P = -{}_P\tilde{\mathbf{r}}_S \dot{\boldsymbol{\omega}}_P, \quad (5.50)$$

wobei  ${}_P\tilde{\mathbf{r}}_S$  ein Tensor zweiter Stufe ist. Mit dieser Umformung werden sowohl die translatorischen als auch rotatorischen Beschleunigungsterme isoliert, so dass Gl. (5.49) äquivalent ist zu

$$\begin{bmatrix} m_P \mathbf{E} & -m_P {}_P\tilde{\mathbf{r}}_S \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Theta}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_P \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_P (\boldsymbol{\omega}_P \times (\boldsymbol{\omega}_P \times {}_P\mathbf{r}_S)) \\ \boldsymbol{\omega}_P \times (\boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\omega}_P) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^\top \mathbf{f} + \mathbf{w}, \quad (5.51)$$

wobei  $\mathbf{E}$  eine Einheitsmatrix mit entsprechender Dimension ist.

Im Folgenden gilt es, Gl. (5.51) im raumfesten Koordinatensystem  $\mathcal{B}$  aufzulösen. Werden die kinematischen KARDAN-Gleichungen aus Gl. (5.9) und Gl. (5.10) in

Gl. (5.51) eingesetzt und anschließend alle Beschleunigungsterme isoliert, ergeben sich schließlich mit

$$\begin{aligned} & \overbrace{\begin{bmatrix} m_P \mathbf{E} & -m_P {}^B \tilde{\mathbf{r}}_S \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & {}^B \Theta_S \mathbf{H} \end{bmatrix}}^{\mathbf{M}([{}^B \mathbf{r}_P, \Phi]^\top)} \begin{bmatrix} {}^B \ddot{\mathbf{r}}_P \\ \ddot{\Phi} \end{bmatrix} \\ & + \underbrace{\begin{bmatrix} m_P \left[ (\dot{\mathbf{H}} \dot{\Phi}) \times {}^B \mathbf{r}_S + (\mathbf{H} \dot{\Phi}) \times ((\mathbf{H} \dot{\Phi}) \times {}^B \mathbf{r}_S) \right] \\ {}^B \Theta_S (\dot{\mathbf{H}} \dot{\Phi}) + (\mathbf{H} \dot{\Phi}) \times (\Theta_S (\mathbf{H} \dot{\Phi})) \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_K([{}^B \mathbf{r}_P, \Phi]^\top, [{}^B \dot{\mathbf{r}}_P, \dot{\Phi}]^\top)} = {}^B \mathbf{A}^\top \mathbf{f} + {}^B \mathbf{w}. \quad (5.52) \end{aligned}$$

die Bewegungsgleichungen in den Endeffektor-Koordinaten  ${}^B \mathbf{r}_P$  und  $\Phi$ , siehe dazu Gl. (5.3). Dabei ist

$${}^B \Theta_S = {}^B \mathbf{R}_P {}^P \Theta_S {}^B \mathbf{R}_P^\top \quad (5.53)$$

die zeitlich veränderliche Trägheitsmatrix referenziert im Inertialsystem  $\mathcal{B}$  und

$${}^B \tilde{\mathbf{r}}_S = \begin{bmatrix} 0 & -{}^B r_{S,z} & {}^B r_{S,y} \\ {}^B r_{S,z} & 0 & -{}^B r_{S,x} \\ -{}^B r_{S,y} & {}^B r_{S,x} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.54)$$

eine schiefsymmetrische Matrix. Außerdem ist  $\mathbf{M}([{}^B \mathbf{r}_P, \Phi]^\top) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  die Massenmatrix der Plattform und  $\mathbf{w}_K([{}^B \mathbf{r}_P, \Phi]^\top, [{}^B \dot{\mathbf{r}}_P, \dot{\Phi}]^\top) \in \mathbb{R}^m$  der Vektor der Kreiselkräfte. Des Weiteren ist zu beachten, dass sowohl die Strukturmatrix  ${}^B \mathbf{A}^\top$  als auch der Vektor der eingprägten Kräfte und Momente  ${}^B \mathbf{w}$  ebenfalls im Inertialsystem  $\mathcal{B}$  referenziert sind. Konkret lauten sie gemäß Gl. (5.43)

$$\begin{aligned} {}^B \mathbf{A}^\top &= \begin{bmatrix} {}^B \boldsymbol{\nu}_1 & \dots & {}^B \boldsymbol{\nu}_n \\ {}^B \mathbf{r}_1 \times {}^B \boldsymbol{\nu}_1 & \dots & {}^B \mathbf{r}_n \times {}^B \boldsymbol{\nu}_n \end{bmatrix}, \\ {}^B \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} {}^B \mathbf{f}_E \\ {}^B \boldsymbol{\tau}_E \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Wird der Vektor der Plattform-Pose gemäß Gl. (5.3) verwendet, lässt sich Gl. (5.52) auch kürzer schreiben als

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_P) \ddot{\mathbf{x}}_P + \mathbf{w}_K(\mathbf{x}_P, \dot{\mathbf{x}}_P) = {}^B \mathbf{A}^\top \mathbf{f} + {}^B \mathbf{w}. \quad (5.56)$$

Dabei ist zu beachten, dass auch die Strukturmatrix abhängig von der Pose der Plattform ist, d. h.  ${}^B \mathbf{A}^\top = {}^B \mathbf{A}^\top(\mathbf{x}_P)$ .



### 5.2.7 Modellbildung und Simulation der Seilelastizität

In erster Näherung kann das Seil durch ein masseloses, parallel geschaltetes Feder-Dämpfer-System mit einseitiger Bindung modelliert werden. Dabei trägt nur die positive Summe aus Feder- und Dämpferkraft zur gesamten Seilkraft bei:

$$f_i = \begin{cases} \hat{f}_i & \hat{f}_i > 0 \\ 0 & \hat{f}_i \leq 0 \end{cases}, \quad \hat{f}_i = c_i \Delta l_i + d_i \Delta \dot{l}_i \quad (5.57)$$

mit

$$\Delta l_i = l_i - l_{i,0} \quad (5.58)$$

$$\Delta \dot{l}_i = \dot{l}_i - \dot{l}_{i,0} \quad (5.59)$$

und

$$c_i = \frac{EA}{l_{i,0}} = \frac{EA}{l_i - \Delta l_i} = \frac{EA}{l_i (1 - \frac{\Delta l_i}{l_i})} = \frac{EA}{l_i (1 - \epsilon_i)}, \quad \epsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l_i}, \quad (5.60)$$

wobei

$E$  : Elastizitätsmodul des Seils,

$A$  : Querschnittsfläche des Seils,

$d_i$  : Dämpfungskoeffizient,

$l_{i,0}$  : ungespannte Federlänge,

$l_i$  : tatsächliche Federlänge,

$\Delta l_i$  : effektive Federlänge,

$\epsilon_i$  : relative Dehnung.

Im Folgenden wird die dynamische Simulation des Regalbediengeräts erläutert, wobei die Auswirkungen der elastischen Seile gemäß des obigen Seilmodells auf die Genauigkeit der Plattform-Pose dargestellt werden sollen. Zu diesem Zweck werden die Bewegungsgleichungen aus Gl. (5.56) in ein Zustandsmodell transformiert, wobei die Seilkräfte  $\mathbf{f}$  durch das Seilmodell aus Gl. (5.57) explizit bestimmt werden. Demnach ist das Seilmodell auch von der ungespannten Seillänge  $\mathbf{l}_0$  und deren Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{l}}_0$  abhängig, also

$$\mathbf{f} := \mathbf{f}(\mathbf{x}_P, \dot{\mathbf{x}}_P, \mathbf{l}_0, \dot{\mathbf{l}}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_P, \dot{\mathbf{x}}_P, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = [\mathbf{l}_0, \dot{\mathbf{l}}_0]^\top. \quad (5.61)$$

Mit Einführung des Zustandsvektors  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]^\top = [\mathbf{x}_P, \dot{\mathbf{x}}_P]^\top$  ergibt sich das Zustandsmodell

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{M}(\mathbf{x}_1)^{-1} [\mathbf{A}^\top(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}) + \mathbf{w} - \mathbf{w}_K(\mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_2)] \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_Z(\mathbf{x}, \mathbf{u})}. \quad (5.62)$$

In Abb. 5.15 ist das prinzipielle Blockschaltbild zur Simulation der Seilelastizität dargestellt. Die ungespannten Soll-Seillängen  $\mathbf{l}_0(t)$  und deren Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{l}}_0(t)$

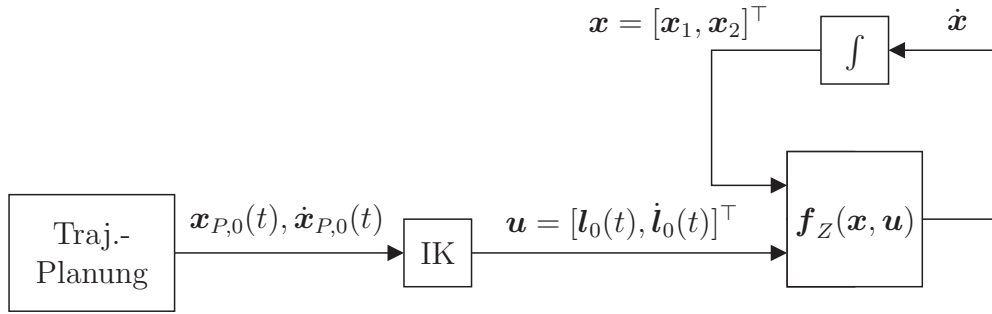


Abbildung 5.15: Blockschaltbild zur Simulation der Plattformbewegung unter Berücksichtigung der Seilelastizität, IK = Inverse Kinematik.

fungieren hier als Eingang der Zustandsgleichung. Während die inverse Kinematik der Plattformbewegung (Block IK) in Abschnitt 5.2.4 behandelt worden ist, wird das Thema der Trajektorienplanung in Abschnitt 5.5 näher erläutert.

Die hier verwendete Trajektorie ist in Abb. 5.16 zu sehen. Dabei ist zu allen Zeiten die Orientierung der Plattform stets parallel zum Boden und zum Regal. Erkennbar

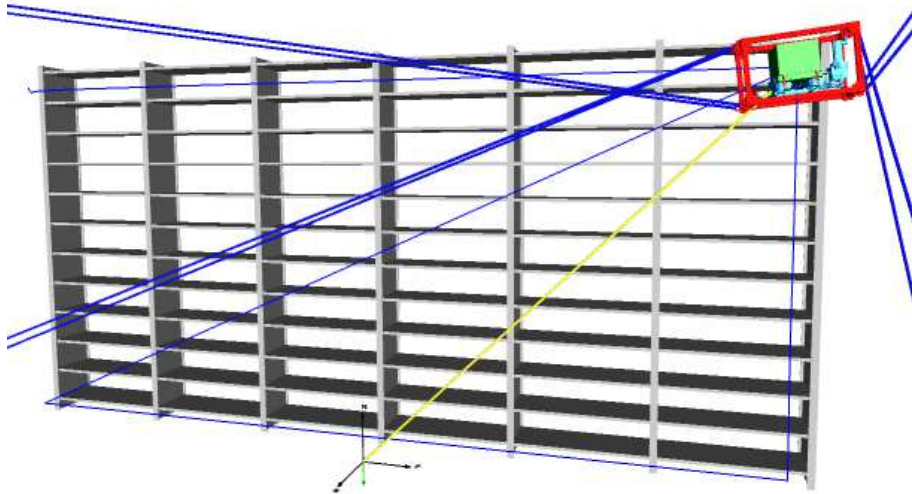


Abbildung 5.16: Plattform-Trajektorie unter Berücksichtigung der Seilelastizität.

ist darin qualitativ die Neigung der Plattform um die  $x$ -Achse bei einer Position in der oberen rechten Ecke des Regals, die durch die Seilelastizität hervorgerufen wird. In Abb. 5.17 wird die Differenz zwischen Soll- und Ist-Pose  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_{P,0} - \mathbf{x}_1$  der Plattform deutlich. Anhand der Simulationsergebnisse wird ersichtlich, dass

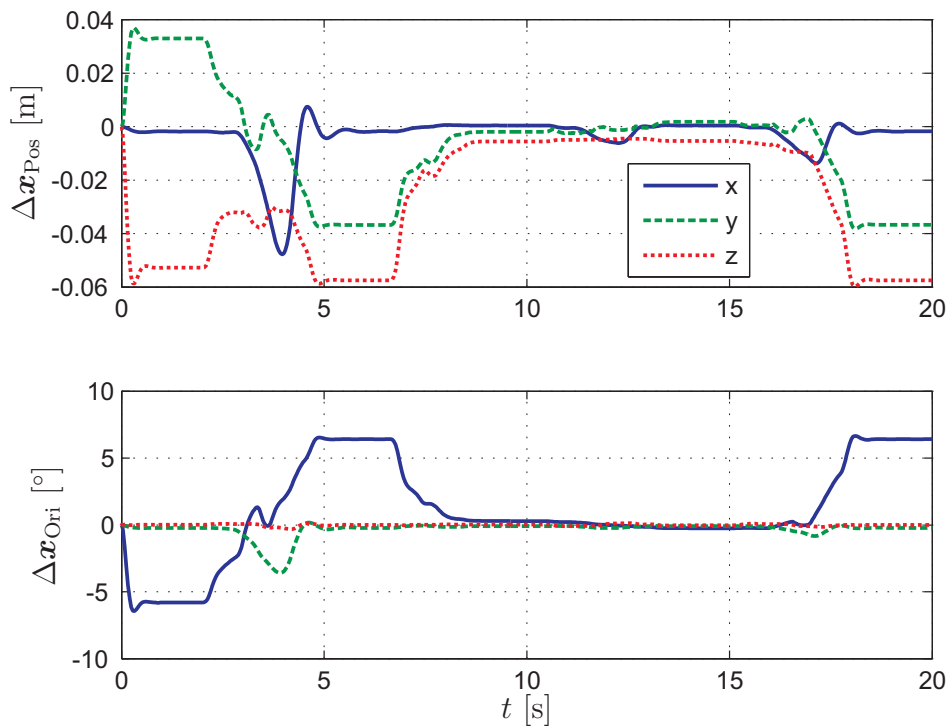


Abbildung 5.17: Auswirkungen der Seilelastizität auf die Positioniergenauigkeit der Plattform. Oben: Positionsabweichung, unten: Orientierungsabweichung.

die Seilelastizität Positionsungenauigkeiten bis zu 6 cm und Orientierungsfehler bis zu  $7^\circ$  verursacht, wobei sich die größten Fehler in der oberen linken und rechten Eckposition des Regals ergeben.

In Abb. 5.18 werden die aus dieser Trajektorie ergebenden Seilkräfte dargestellt. Erkennbar ist hier die unilaterale Bindung des Seils, welche mit Gl. (5.57) realisiert worden ist, bei der die Seile nicht vorgespannt sind ( $\mathbf{f}(t) \geq \mathbf{0}!$ ).

Diese Ergebnisse zeigen, dass eine reine Positionsregelung der Antriebe nicht ausreicht, um die Plattform genau positionieren zu können. Diese Ungenauigkeit ergibt sich aus der Elastizität der verwendeten Seile. Eine Verbesserung der Positionier- und Orientierungsgenauigkeit könnte beispielsweise durch Kompensation der Seilelastizität mit Hilfe eines entsprechenden Seilmodells oder durch direkte Messung der Plattform-Pose mit übergeordneter Positionsregelung der Plattform erreicht werden.

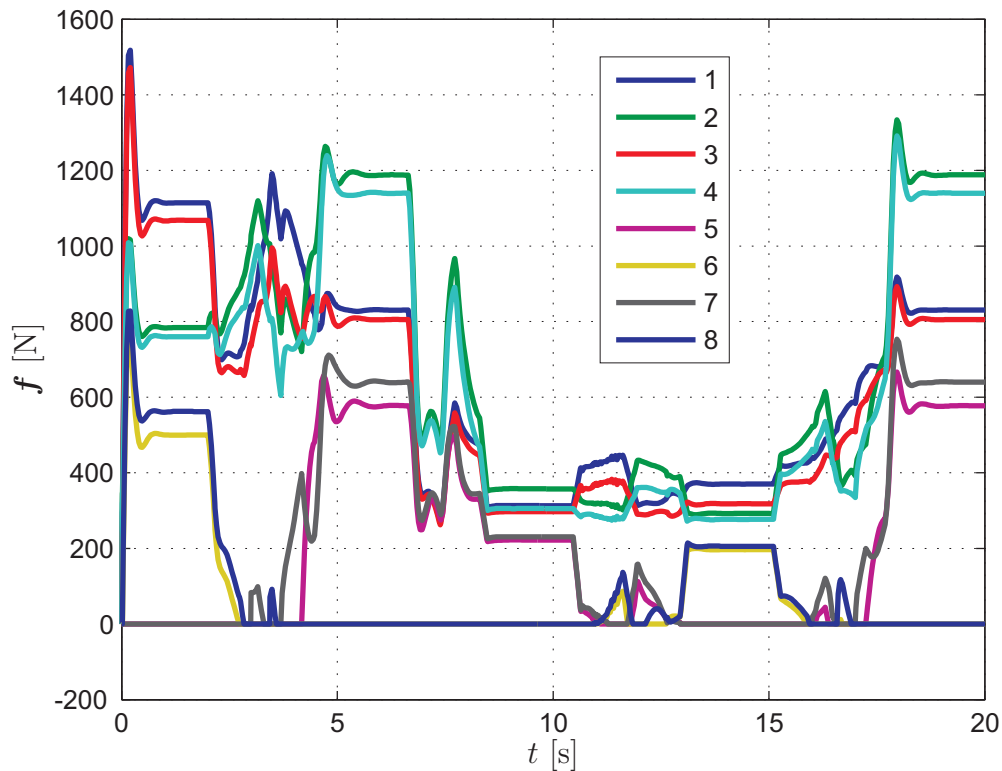


Abbildung 5.18: Seilkraftverlauf ohne Vorspannung.

Des Weiteren ist eine entsprechende Vorspannung der Seile erforderlich, um eine innere Vorspannung der Plattform zu gewährleisten, um den Einfluss von Störeffekten auf die Plattform zu reduzieren.

Um eine erforderliche Genauigkeit der Plattform-Pose und eine definierte Vorspannung in den Seilen zu erreichen ist es erforderlich, die für diese Pose oder Bewegung erforderlichen Seilkräfte vorab zu bestimmen. Diese Soll-Seilkräfte können zur Momentenregelung bzw. Momentenvorsteuerung (siehe Abschnitt 5.5.2) oder zur Kompensation der Seilelastizität mittels eines Seilmodells verwendet werden. Andererseits gibt die Bestimmung der Seilkräfte bzw. Seilkraftverteilung (Bruckmann 2010) Auskunft darüber, welche Arbeitsräume realisiert werden können (siehe Abschnitt 5.4. Der folgende Abschnitt gibt einen Überblick in die Problematik zur Bestimmung einer optimalen Seilkraftverteilung.

### 5.3 Optimale Seilkraftverteilung

Da Seile nur Zugkräfte aufnehmen können, ist es erforderlich, dass ein Seilroboter mindestens ein zusätzliches Seil mehr nutzt als er Plattform-Freiheitsgrade besitzt (Bruckmann 2010), es muss also gelten:

$$n \geq m + 1. \quad (5.63)$$

Unter dieser Voraussetzung sind die Bewegungsgleichungen in Gl. (5.43) stets unterbestimmt, wobei sich die Antriebsredundanz (siehe Abschnitt 2.2) zu

$$r = n - m \geq 1. \quad (5.64)$$

ergibt.

Ein praktisches Anwendungsbeispiel für einen Seilroboter mit ein- bzw. zweifacher Redundanz ist beispielsweise der Prototyp SEGESTA (SEILGETRIEBENE STEWART-PLATTFORMEN IN THEORIE UND ANWENDUNG) bestehend aus sieben Seilen und sechs Plattform-Freiheitsgraden (Fang 2005), der daraufhin im Projekt ARTIST (ARBEITSRAUMSYNTHESE SEILGETRIEBENER PARALLELKINEMATIKSTRUKTUREN) um ein zusätzliches Seil erweitert wurde (Bruckmann 2010). In Borgstrom u. a. (2009) wird der Prototyp eines dreifach redundanten Seilroboters (neun Seile, sechs Plattform-Freiheitsgrade) beschrieben.

Die Anwendung höher redundanter Seilroboter bietet den Vorteil, dass zusätzliche (Seil-)Kräfte auf die Plattform eingeprägt werden können, um den Arbeitsraum des Seilroboters zu erhöhen und um bei gleicher Verspannung die Einzellast der Seile zu reduzieren (so dass der Einsatz kleinerer Antriebsmotoren ermöglicht wird). Demgegenüber steht unter anderem die steigende regelungstechnische Komplexität des Seilroboters und der erhöhte rechnerische Aufwand bei der Ermittlung einer gültigen Seilkraftverteilung.

Aufgrund der Redundanz des Seilroboters bzw. Unterbestimmtheit der Bewegungsgleichungen (5.43) existiert eine unbegrenzte Anzahl an realisierbaren Seilkraftverteilungen. Die Wahl einer technisch sinnvollen Seilkraftverteilung hängt dabei von verschiedenen Faktoren wie beispielsweise der Seilfestigkeit, der maximal verfügbaren Motorleistung und der Größe und Form des Arbeitsraums ab (Bruckmann 2010). Diese technischen Beschränkungen lassen sich zunächst durch untere und obere Seilkraftgrenzen der Form

$$0 < \mathbf{f}_{\min} \leq \mathbf{f} \leq \mathbf{f}_{\max} \quad (5.65)$$

ausdrücken. Da Seile nur Zugkräfte aufnehmen können, sind  $\mathbf{f}_{\min}$  und  $\mathbf{f}_{\max}$  stets positiv. Innerhalb dieser gültigen Seilkraftgrenzen ist es – sofern die Bewegungsgleichungen (5.43) eingehalten werden – dennoch möglich, aus einer unendlichen Anzahl an Seilkraftverteilungen willkürlich zu wählen<sup>7</sup>. Es existieren verschiedene Ansätze bei der Wahl der resultierenden Seilkraftverteilung. Der gängigste Ansatz liegt dabei offensichtlich bei der Wahl der kleinsten möglichen Seilkraftverteilung (innerhalb der gültigen Seilkraftgrenzen). Andere Ansätze verfolgen Seilkraftverteilungen im mittleren Bereich der gültigen Seilkraftgrenzen und gewährleisten somit „sichere“ Seilkräfte fernab der Seilkraftgrenzen (Mikelsons u. a. 2008; Borgstrom u. a. 2009).

Eine kleinstmögliche Seilkraftverteilung lässt sich unter Berücksichtigung der Bewegungsgleichungen gemäß Gl. (5.43) durch folgendes quadratische Optimierungsproblem bestimmen:

$$\min_{\mathbf{f}} \mathcal{Z}(\mathbf{f}) = \frac{1}{2} \mathbf{f}^\top \mathbf{G} \mathbf{f} \quad (5.66a)$$

$$\text{u. d. N. } \mathbf{A}^\top \mathbf{f} = \mathbf{w}_{\text{dyn}} - \mathbf{w}, \quad (5.66b)$$

$$\mathbf{f}_{\min} \leq \mathbf{f} \leq \mathbf{f}_{\max}, \quad (5.66c)$$

wobei  $\mathbf{G}$  eine positiv definite Wichtungsmatrix ist.

Unter Umständen mag es sinnvoll erscheinen, eine Lösung um eine referentielle Seilkraftverteilung  $\mathbf{f}_{\text{Ref}}$  zu bestimmen, um beispielsweise ähnlich wie in Mikelsons u. a. (2008); Borgstrom u. a. (2009) Seilkräfte im mittleren Bereich der gültigen Kräfte zu erhalten:

$$\mathbf{f}_{\text{Ref}} = \frac{1}{2} (\mathbf{f}_{\min} + \mathbf{f}_{\max}). \quad (5.67)$$

Zu diesem Zweck wird die Zielfunktion aus Gl. (5.66a) durch

$$\mathcal{Z}(\mathbf{f}) = \frac{1}{2} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\text{Ref}})^\top \mathbf{G} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\text{Ref}}) \quad (5.68)$$

ersetzt.

## 5.4 Arbeitsraumberechnung

Wie in Abschnitt 5.2.1 beschrieben ist der Arbeitsraum des Regalbediengeräts durch die Dimensionen des Regals in der  $xy$ -Ebene definiert (Abb. 5.2), d. h. der Seilroboter muss in der Lage sein, die Plattform vor jedes Regalfach zu fahren. Jede zu

<sup>7</sup>In Bruckmann (2010) wird die Interpretation des Lösungsraums der Seilkraftverteilungen anhand eines Seilroboters mit drei Seilen und einem Plattform-Freiheitsgrad ( $n = 3$  und  $m = 1$ ) eingehend erläutert.

erreichende Pose (Position und Orientierung) der Plattform unterliegt dabei den Bewegungsgleichungen gemäß Gl. (5.52), wobei die für jede Pose erforderlichen Seilkräfte innerhalb der minimalen und maximalen Seilkraftgrenzen  $\mathbf{f}_{\min}$  und  $\mathbf{f}_{\max}$  liegen müssen.

Aufgrund der Tatsache, dass die Plattform vor jedem Regalfach beim Be- bzw. Entladen einer Kiste waagrecht orientiert sein muss, ist zunächst der *Constant Orientation Workspace* bzw. *Translation Workspace* relevant (Merlet 2006). Dieser definiert den Arbeitsraum als die Menge aller Punkte, die mit der Plattform bei einer fest vorgegebenen Orientierung (in unserem Fall waagerechte Orientierung, d. h. nach Gl. (5.2) sind die KARDAN-Winkel  $\varphi$ ,  $\theta$  und  $\psi$  stets Null) der Plattform erreicht werden können (Bruckmann 2010). Des Weiteren wird im Folgenden bei der Bestimmung des Arbeitsraums lediglich der Einfluss der Erdbeschleunigung  $\mathbf{g}$  auf Plattform und Nutzlast berücksichtigt, d. h. sämtliche Beschleunigungskräfte werden zunächst vernachlässigt. Laut Bruckmann (2010) entspricht diese Art des Arbeitsraums dem *Static Equilibrium Workspace*, wobei wie bereits erwähnt lediglich die waagerechte Plattform-Orientierung von Interesse ist. Damit unterliegen die zu erreichenden Plattform-Posen dem Kräfte- und Momentengleichgewicht gemäß Gl. (5.45)

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{f} + \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (5.69)$$

und den eingeprägten Kräften und Momenten aus Gl. (5.44)

Zweckmäßigerweise wird bei der Bestimmung des noch unbekannten Arbeitsraums der Suchbereich auf den durch die Basis- bzw. Seilaustrittspunkte begrenzenden Raum beschränkt. Dieser Suchbereich wird anschließend durch eine genügend genaue äquidistante Aufteilung diskretisiert und an jedem diskreten Punkt – welcher der Plattform-Position entspricht – das Kräfte- und Momentengleichgewicht gemäß Gl. (5.45) ausgewertet und die Seilkraftverteilung  $\mathbf{f}$  bestimmt. Existiert in dem Punkt eine gültige Lösung von  $\mathbf{f}$ , bei der Gl. (5.65) gilt, ist diese Plattform-Position Teil des Arbeitsraums.

Aufgrund der Diskretisierung ist jedoch keine Aussage möglich, ob der Bereich zwischen den Punkten ebenfalls Teil der Arbeitsraums ist. Mit Hilfe der Intervallanalyse, angewendet auf die Arbeitsraumberechnung, können anstatt einer Punktwolke ganze Bereiche erfasst werden, in denen garantiert werden kann, dass sie entweder Teil des Arbeitsraums sind oder nicht. In dieser Arbeit wird die Arbeitsraumberechnung mittels Intervallanalyse nicht weiter verfolgt, jedoch auf zahlreiche Literatur hingewiesen, darunter in Merlet (1994, 2004, 2006); Pott und Hiller (2006a, b); Pott (2007); Bruckmann (2010).

Für die Arbeitsraumberechnung wird im Folgenden in jedem Diskretisationspunkt die minimale Seilkraftverteilung ermittelt. Da bereits im vorigen Abschnitt erwähnt wurde, dass Gl. (5.69) unterbestimmt ist und daher für eine Position und Orientierung der Plattform unendlich viele Seilkraftverteilungen existieren, liefert das quadratische Optimierungsproblem der Form

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{f}} \mathcal{Z}(\mathbf{f}) &= \frac{1}{2} \mathbf{f}^\top \mathbf{G} \mathbf{f} \\ \text{u. d. N.} \quad \mathbf{A}^\top \mathbf{f} &= \mathbf{w}, \\ \mathbf{f}_{\min} &\leq \mathbf{f} \leq \mathbf{f}_{\max}. \end{aligned}$$

die Lösung der minimalen Seilkraftverteilung eines jeden Diskretisationspunktes im *Static Equilibrium Workspace* und kann beispielsweise mit der Active-Set-Methode aus Abschnitt 3.3 effizient gelöst werden. Dabei ist  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine positiv definite Wichtungsmatrix und soll im Folgenden für die Arbeitsraumberechnung durch eine Einheitsmatrix ersetzt werden. Weitere Ansätze zur Auflösung der Redundanz sind in Borgstrom u. a. (2009); Bruckmann (2010); Verhoeven und Hiller (2002); Oh und Agrawal (2005); Ebert-Uphoff und Voglewede (2004); Pott u. a. (2009) zu finden.

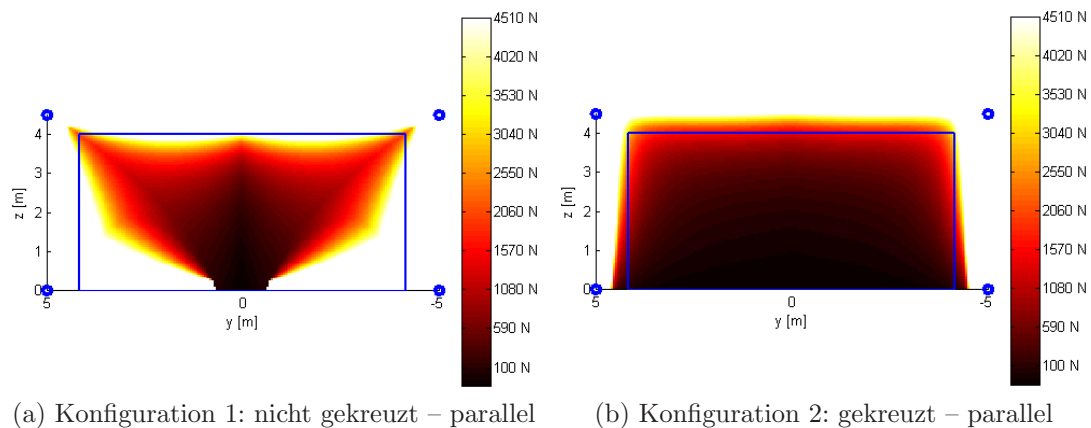
#### 5.4.1 Arbeitsraum des Regalbediengeräts

Der relevante Arbeitsraum des Regalbediengeräts definiert sich durch die Dimension des Regals in der  $yz$ -Ebene (siehe Abb. 5.2). In dieser Ebene findet auch die Bahnbewegung der Plattform statt, in der sie die Güter von einem Fach in ein anderes transportiert. Aus diesem Grund werden im Folgenden die Arbeitsräume des Seilroboters in zweidimensionaler Darstellung in der  $yz$ -Projektion vorgestellt. Die berechneten Arbeitsräume beziehen sich dabei auf die in Abschnitt 5.2.2 konzipierten Gestaltungsmöglichkeiten des Seilroboters gemäß den Konfigurationen 1 bis 4.

Für die folgenden Simulationsergebnisse liegen die minimal und maximal erlaubten Seilkräfte bei  $f_{\min} = 100 \text{ N}$  und  $f_{\max} = 5000 \text{ N}$ . Die Gesamtmasse der Plattform beträgt 100 kg. Die geometrischen Maße des Seilroboters sind aus Tab. 5.1 zu entnehmen.

In Abb. 5.19a ist der Arbeitsraum von Seilroboter-Konfiguration 1 dargestellt, wie sie von Hassan und Khajepour (2009) vorgeschlagen und in Abb. 5.2 dargestellt wird. Das (blaue) Rechteck stellt die Außenmaße des Regals dar. Die Seilaustrittspunkte an der Basis werden durch die kleinen (blauen) Kreise repräsentiert. Anhand des Ergebnisses wird zweierlei deutlich. Zunächst repräsentieren die dunklen und hellen





(a) Konfiguration 1: nicht gekreuzt – parallel      (b) Konfiguration 2: gekreuzt – parallel

Abbildung 5.19: Arbeitsraum des Seilroboters nach Konfigurationen 1 und 2.

(schwarzen und gelben) Bereiche den gültigen, weiße Bereiche den ungültigen Arbeitsraum. Des Weiteren stellen die Nuancen von dunkel nach hell (schwarz nach gelb) quantitativ die maximale Kraft der minimalen Seilkraftverteilung an der entsprechenden Position dar. Dabei bedeutet, dass kleine maximale Kräfte dunkel und große entsprechend hell erscheinen. Rechts im Bild ist die Zuordnung der Farben zu den maximalen Seilkräften dargestellt.

Bei Konfiguration 1 in Abb. 5.19a wird deutlich, dass der Arbeitsraum für die vorgegebenen Seilkraftgrenzen unzureichend ist, da das gesamte Hochregal nicht komplett abgedeckt werden kann. So werden beispielsweise bei Plattform-Positionen in der linken und rechten unteren Ecke die maximal erlaubten Seilkräfte weit überschritten und geraten unnötigerweise in die Nähe der Seilbruchlast. Konfiguration 1 ist daher nicht für die Anwendung als Regalbediengerät geeignet.

Bei Konfigurationen 2 bis 4 (Abb. 5.4, 5.5, 5.6) ergeben sich die entsprechenden Arbeitsräume in 5.19b, 5.20a und 5.20b. Es ist erkennbar, dass allein durch das Kreuzen der oberen und unteren Seile ein deutlich größerer und homogenerer Arbeitsraum erreicht und insbesondere der gesamte Regalbereich abgedeckt werden kann.

#### 5.4.2 Optimaler Arbeitsraum des Regalbediengeräts

Die vorab „intuitiv“ durchgeführte Arbeitsraum-Optimierung durch das Kreuzen der oberen und unteren Seile wird im Folgenden durch eine berechnete Arbeitsraumoptimierung ergänzt. Folgende Überlegungen sind in die Optimierung eingeflossen:

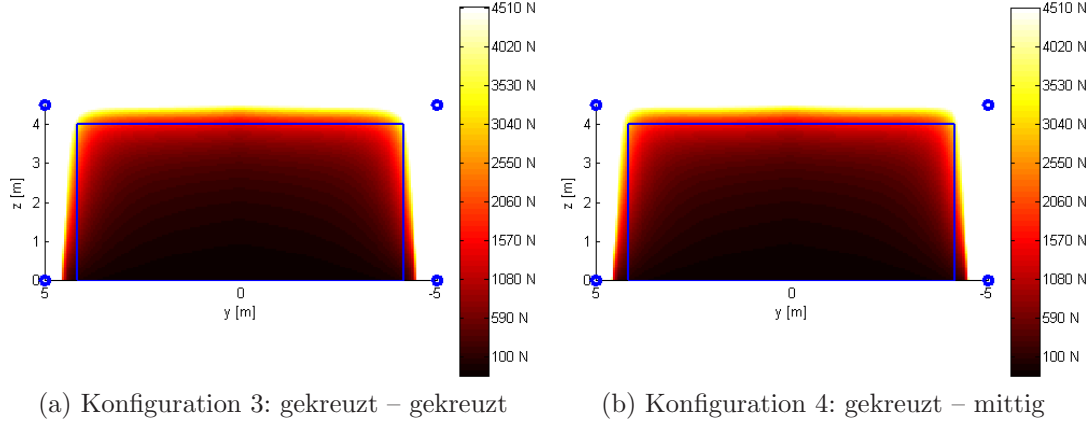


Abbildung 5.20: Arbeitsraum des Seilroboters nach Konfigurationen 3 und 4.

- Aus technischen Gründen (siehe Abschnitt 5.2.2) wird die Seilanordnung gemäß Konfiguration 4 gewählt, bei der die am oberen Teil der Plattform befestigten Seile mittig angeordnet sind (Abb. 5.6b).
- Es wird ausschließlich eine Optimierung der  $y$ - und  $z$ -Komponenten der Basispunkte durchgeführt, d. h. die  $x$ -Komponenten der Basispunkte bleiben unverändert.
- Die Anlenkpunkte auf der Plattform bleiben unverändert und fließen nicht in die Optimierung ein.
- Aufgrund der Symmetrie des Regalbediengeräts um die  $y$ -Achse reduziert sich die Anzahl der zu optimierenden Variablen auf vier Größen (Abb. 5.21):

$$\mathbf{v} = [\Delta y_1, \Delta z_1, \Delta y_2, \Delta z_2]^\top \quad (5.70)$$

- Es werden für markante Positionen innerhalb des Regals (z. B. die oberste, unterste und mittlere Position am rechten Rand des Regals) die Kräfte- und Momentengleichgewichte gemäß Gl. (5.45) ausgewertet, welche als nichtlineare Nebenbedingungen in die Optimierung einfließen. Zweckmäßigerweise werden Positionen im positiven Bereich der  $y$ -Achse verwendet.
- Aufgrund der Symmetrie werden die unteren Grenzen der Optimierungsvariablen zu Null gesetzt, während die oberen Grenzen durch die Umgebungsbedingungen, etwa dem maximal verfügbaren Aufstellraum, definiert werden.
- Das Ziel der Optimierung ist die Reduzierung der an den ausgewählten Positionen auftretenden maximalen Seilkräfte.

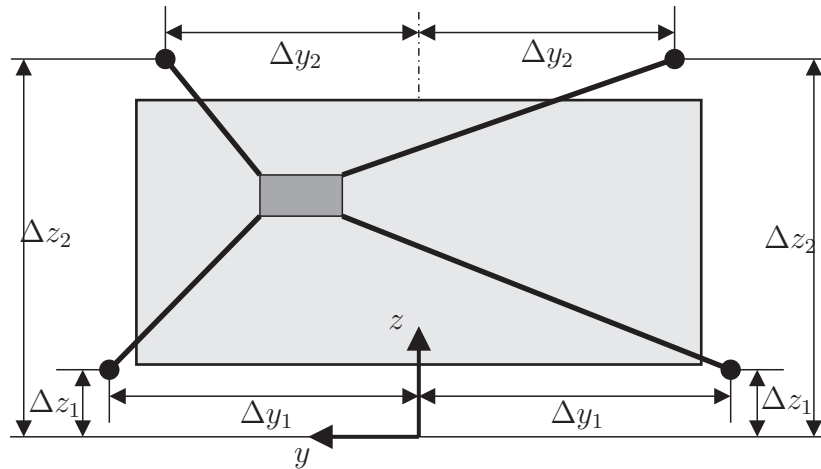


Abbildung 5.21: Darstellung der zu optimierenden Variablen.

Das vorliegende Problem der optimalen Arbeitsraumberechnung lässt sich als nicht-lineares Programm (NLP) beschreiben und kann beispielsweise mit den in Gill u. a. (1981) vorgestellten Verfahren gelöst werden.

Im Folgenden wird die aus den obigen Überlegungen optimierte Seilroboter-Anordnung mit Konfiguration 5 gekennzeichnet und dessen Arbeitsraum in Abb. 5.22 dargestellt. Als Startlösung des NLPs dient Konfiguration 4 des Seilroboters aus

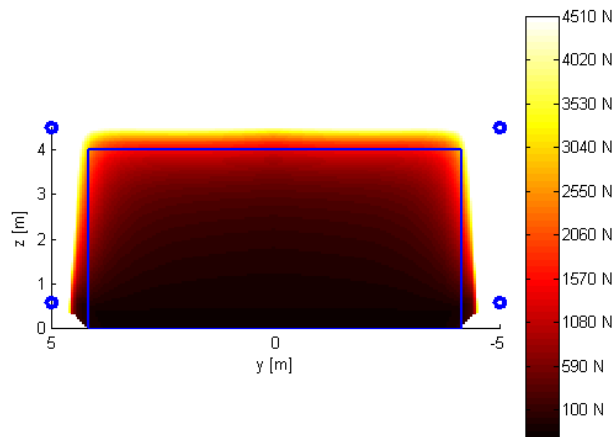


Abbildung 5.22: Arbeitsraum des Seilroboters nach der Optimierung.

Abb. 5.6a, allerdings mit dem Unterschied, dass die Seile in der  $yz$ -Projektion nicht gekreuzt sind (wird im Folgenden Konfiguration 4\* bezeichnet). Die maximale, halbe Länge der Basispunkte in  $y$ -Richtung beträgt dabei  $\Delta y_{\max} = 5$  m, die maximale Höhe in  $z$ -Richtung  $\Delta z_{\max} = 4.5$  m. Die Gesamtmasse der Plattform beträgt 100 kg. Tab. 5.2 fasst die geometrischen Parameter der Basispunkte vor und nach der Optimierung zusammen. Anhand dessen ist erkennbar, dass aus der Start-

Tabelle 5.2: Geometrische Parameter der Start- und Optimallösung

Konfiguration	$\Delta y_1[\text{m}]$	$\Delta z_1[\text{m}]$	$\Delta y_2[\text{m}]$	$\Delta z_2[\text{m}]$
4*	$\Delta y_{\max}$	0	$\Delta y_{\max}$	$\Delta z_{\max}$
5 (optimiert)	$\Delta y_{\max}$	$\Delta z_{\max}$	$\Delta y_{\max}$	0.5987

konfiguration, die in der  $yz$ -Projektion eine nicht-gekreuzte Seilanordnung aufweist ( $\Delta z_{1,4^*} < \Delta z_{2,4^*}$ ), eine optimale, gekreuzte Konfiguration bestimmt wurde, da nun  $\Delta z_{1,5} > \Delta z_{2,5}$  ist.

In Tab. 5.3 wird die Arbeitsraum-Abdeckung der einzelnen Konfigurationen zusammengefasst, wobei eine Arbeitsraum-Diskretisierung von 200 Punkten in  $y$ -Richtung und 92 Punkten in  $z$ -Richtung gewählt wurde. Aus Tab. 5.3 wird deutlich, dass

Tabelle 5.3: Vergleiche der Arbeitsräume der verschiedenen Konfigurationen, Notation: = Seile sind parallel/nicht gekreuzt angeordnet,  $\times$  Seile sind gekreuzt angeordnet,  $\wedge$  Seile sind mittig auf der Plattform angeordnet; gültiger Bereich der Seilkraft:  $f_{\min} = 0.1 \text{ kN}$ ,  $f_{\max} = 5 \text{ kN}$ ;  $f_{\max, \text{Regal}}$  ist die innerhalb des Regals größte vorkommende Seilkraft; Masse der Plattform: 100 kg

Konf.	$yz$ - Proj.	$xz$ - Proj.	$\frac{\text{Arbeitsraum}}{\text{Basisfläche}}$ [%]	$\frac{\text{Arbeitsraum}}{\text{Regalfläche}}$ [%]	$f_{\max, \text{Regal}}$ [kN]	$\frac{f_{\max, \text{Regal}}}{f_{\max}}$ [%]
Referenz	—	—	100	—	$\infty$	$\infty$
1	=	=	56.36	75.45	5.0	100
2	$\times$	=	85.6	100	3.82	76.49
3	$\times$	$\times$	84.91	100	4.42	88.43
4	$\times$	$\wedge$	85.58	100	3.82	76.48
5	optimiert, $\times$	$\wedge$	85.93	100	3.50	70.04

die erste Konfiguration eine schlechte Arbeitsraum-Abdeckung aufweist, da fast die Hälfte der Basisfläche unter den gegebenen technischen Anforderungen nicht erreicht werden kann (vierte Spalte). Stattdessen haben alle in der  $yz$ -Projektion gekreuzten Konfigurationen weitaus bessere Verhältnisse, wobei Konfiguration 2 aus den in Abschnitt 5.2.2 genannten Gründen technisch nicht zweckmäßig ist. Konfiguration 4 hat gegenüber Konfiguration 2 ein unbedeutend kleineres Verhältnis, kompensiert jedoch die gravierenden Nachteile der zweiten und dritten Konfiguration.

Notwendig für die technische Anwendbarkeit einer Seilkonfiguration ist die Flächenabdeckung des gesamten Regals. Während Konfiguration 1 nur knapp über 75 % des Regals abdecken kann und somit unbrauchbar ist, erfüllen alle anderen Konfigurationen 2 bis 5 die notwendige Bedingung (fünfte Spalte). Konfiguration 5 ist dabei der

optimierte Seilroboter und weist ebenfalls eine in der  $yz$ -Projektion gekreuzte Seilanordnung auf und verdeutlicht, dass die qualitativ optimierten Konfigurationen 2 bis 4 schon tendenziell dem berechneten Optimum nah sind. Die maximal auftretende Seilkraft gegenüber der ungültigen, ersten Konfiguration kann um fast 30 % gesenkt werden. Im Vergleich zur vierten Konfiguration ergibt sich eine Reduzierung der maximalen Seilkraft um etwa 8.4 %.

## 5.5 Optimale Bewegungstrajektorie

### 5.5.1 Einfache Trajektoriengenerierung

Die für Regalbediengeräte typische Aufgabe ist es, ein Ladegut in ein freies Regalfach einzulagern oder aus einem Regalfach an den Ein-/Ausgabepunkt zu befördern. Die Bahn der Plattform besteht demnach darin, dass sie in der  $yz$ -Ebene (Abb. 5.23) von Punkt bzw. Fach  $A$  (z.B. dem Ein-/Ausgabefach) nach Punkt bzw. Fach  $B$  führt.

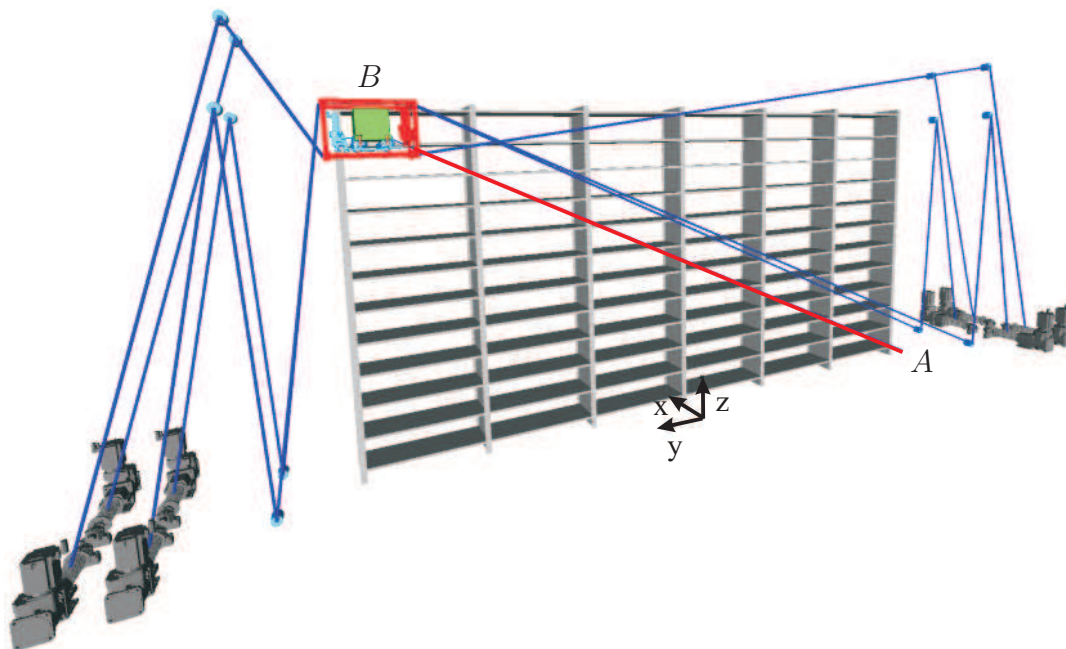


Abbildung 5.23: Einfache Bahn der Plattform von  $A$  nach  $B$ .

Die Bewegung  $\mathbf{x}_P(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_P(t)$  und  $\ddot{\mathbf{x}}_P(t)$  der Plattform wird mit Hilfe eines Trajektoriengenerators erzeugt. Jeweils am Start- und Endpunkt müssen sowohl Geschwindigkeit als auch Beschleunigung der Plattform Null sein. Die Bewegung der Plattform unterliegt auch gewissen technischen Anforderungen wie beispielsweise der maximal

zu erreichenden Plattform-Geschwindigkeit, -Beschleunigung und dem maximalen Ruck  $v_{P,\max}$ ,  $a_{P,\max}$  und  $r_{P,\max}$ . Die einfachste Bahn ist zunächst die gerade Strecke in der  $yz$ -Ebene von Punkt  $A$  nach Punkt  $B$ . Diese Bahn ist legitim, da im gesamten Arbeitsraum keine Hindernisse im Weg stehen. Dabei soll die Orientierung der Plattform zu allen Zeiten waagrecht sein, d. h. es gilt stets

$$\Phi(t) = \mathbf{0}, \quad \dot{\Phi}(t) = \mathbf{0}, \quad \ddot{\Phi}(t) = \mathbf{0}, \quad \dddot{\Phi}(t) = \mathbf{0}. \quad (5.71)$$

Unter den gegebenen technischen Anforderungen ist es damit möglich, eine  $C^3$ -stetige Trajektorie zu generieren, mit dem Ziel so schnell wie möglich von Punkt  $A$  nach Punkt  $B$  zu gelangen. Die Berechnung dieser minimalen Zeittrajektorie ist in Anbetracht der Aufgabe des Regalbediengeräts sinnvoll. Außerdem hat diese zeitminimale Trajektorie den Vorteil, dass sie leicht zu implementieren ist und eine geschlossene Lösung ermöglicht. Die Trajektoriengenerierung basiert allerdings auf einer rein kinematischen Betrachtungsweise, in der die Dynamik des Seilroboters, d. h. seine Bewegungsgleichungen gemäß Gl. (5.56) nicht berücksichtigt sind. Energie- oder leistungsminimierende Bahnen bzw. Trajektorien, wie sie bei der optimalen Steuerung (siehe z. B. Breun 2007; von Stryk 1994; von Stryk und Schlemmer 1994; von Stryk 1993; Büskens 1993; Dickmanns und Well 1974) realisiert werden können, sind mit dieser Methode nicht möglich.

Bei der Generierung der minimalen Zeittrajektorie ist es zunächst sinnvoll, die ebene, kartesische Bahnbewegung in Bahnkoordinaten, d. h. tangential zur Bahn zu betrachten. Dazu wird zunächst die zurückgelegte Strecke der Plattform bzw. des Bezugspunkts  $\mathcal{P}$  der Plattform (Abschnitt 5.2.3) von Punkt  $A$  nach Punkt  $B$  berechnet. Daraus folgt

$$s_{P,\max} = \|\mathcal{B}\mathbf{r}_B - \mathcal{B}\mathbf{r}_A\|_2. \quad (5.72)$$

und

$$\cos \alpha = \frac{\mathcal{B}r_{B,y} - \mathcal{B}r_{A,y}}{s_{P,\max}}, \quad \sin \alpha = \frac{\mathcal{B}r_{B,z} - \mathcal{B}r_{A,z}}{s_{P,\max}}. \quad (5.73)$$

Für eine  $C^3$ -stetige Trajektorie sind sieben wesentliche Zeitpunkte  $t_1, \dots, t_7$  zu bestimmen, wobei  $\Delta t_{\text{Traj}} = t_7 - t_0$  die minimal benötigte Zeit zum Fahren der Trajektorie ist. Diese Zeitpunkte sind abhängig von den Größen  $t_0$ ,  $s_{P,\min} = s_P(t_0)$ ,  $s_{P,\max}$ ,  $v_{P,\max}$ ,  $a_{P,\max}$  und  $r_{P,\max}$ , wobei vier Fälle unterschieden werden müssen:

1.  $v_{P,\max}$  und  $a_{P,\max}$  werden erreicht:

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < t_6 < t_7$$

2.  $v_{P,\max}$  wird erreicht und  $a_{P,\max}$  wird nicht erreicht:

$$t_0 < t_1 = t_2 < t_3 < t_4 < t_5 = t_6 < t_7$$

3.  $v_{P,\max}$  wird nicht erreicht und  $a_{P,\max}$  wird erreicht:

$$t_0 < t_1 < t_2 = t_3 < t_4 = t_5 < t_6 < t_7$$

4.  $v_{P,\max}$  und  $a_{P,\max}$  werden nicht erreicht:

$$t_0 < t_1 = t_2 = t_3 < t_4 = t_5 = t_6 < t_7$$

Zusammen mit den eingangs erwähnten Randbedingungen haben die vier möglichen Trajektorien-Fälle die zeitlichen Verläufe  $r_p(t)$ ,  $a_p(t)$ ,  $v_p(t)$  und  $s_p(t)$  in Bahnkoordinaten gemäß Abb. 5.24. Die Ausdrücke der Zeitpunkte  $t_1, \dots, t_7$  für die vier Fälle

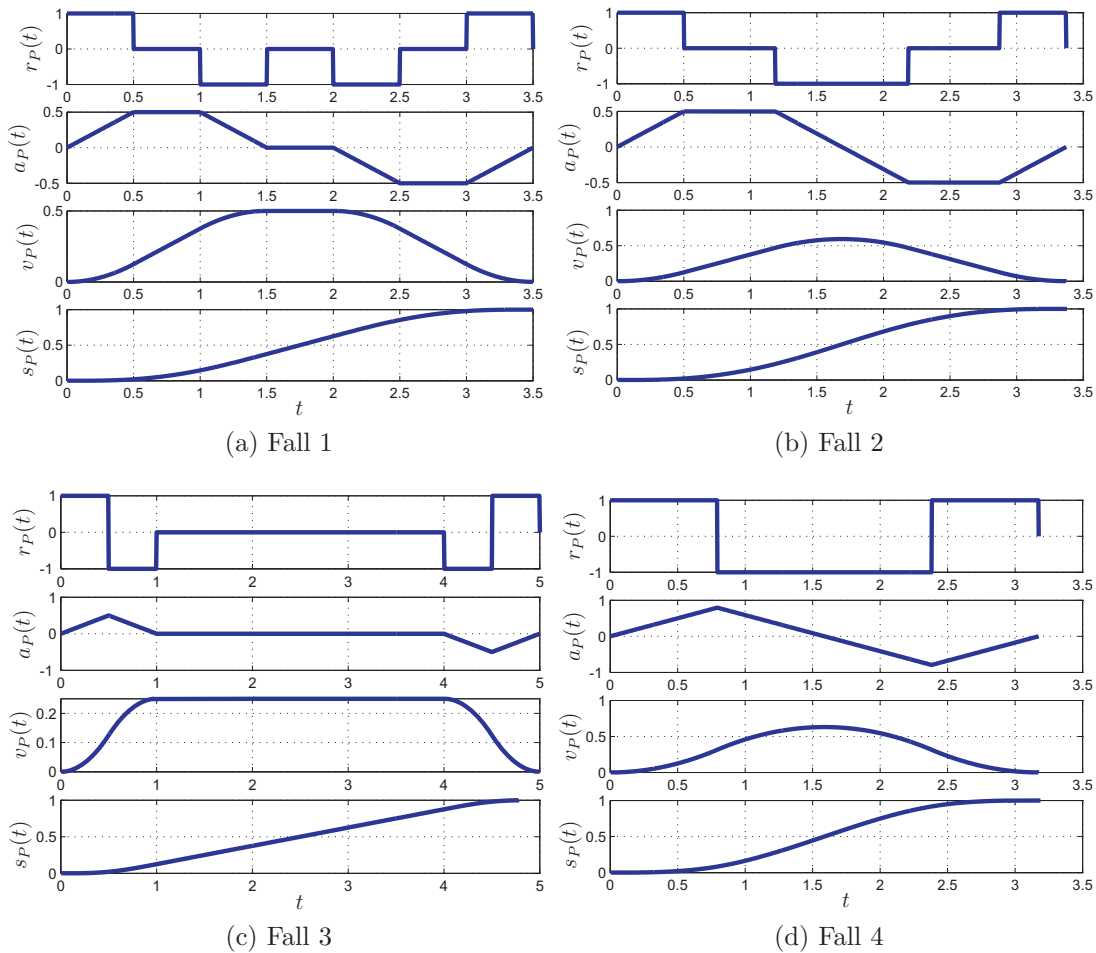


Abbildung 5.24: Die verschiedenen Fälle der minimalen  $C^3$ -Zeittrajektorie für Ruck  $r_p(t)$ , Beschleunigung  $a_p(t)$ , Geschwindigkeit  $v_p(t)$  und Weg  $s_p(t)$  in Bahnkoordinaten.

sind in Anhang C zusammengefasst.

Nun können die in Bahnkoordinaten ermittelten Trajektorien mit Gl. (5.73) ins Inertialsystem  $\mathcal{B}$  gemäß

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\mathbf{r}_P(t) &= s(t) [0, \cos \alpha, \sin \alpha]^\top, \\ \mathcal{B}\dot{\mathbf{r}}_P(t) &= v(t) [0, \cos \alpha, \sin \alpha]^\top, \\ \mathcal{B}\ddot{\mathbf{r}}_P(t) &= a(t) [0, \cos \alpha, \sin \alpha]^\top, \\ \mathcal{B}\ddot{\mathbf{r}}_P(t) &= r(t) [0, \cos \alpha, \sin \alpha]^\top\end{aligned}\tag{5.74}$$

rücktransformiert werden.

Ist die Bewegung der Plattform generiert, d.h. sind die Plattform-Posen  $\mathbf{x}_P(t) = [\mathcal{B}\mathbf{r}_P(t), \Phi(t)]^\top$  und deren zeitliche Ableitungen  $\dot{\mathbf{x}}_P(t)$  und  $\ddot{\mathbf{x}}_P(t)$  sowie die eingprägten Kräfte und Momente  ${}^B\mathbf{w}$  gegeben, können im Anschluss mit Hilfe der Gleichungen der inversen Kinematik aus Abschnitt 5.2.4 die Seillängen, -Geschwindigkeiten und -Beschleunigungen  $l_i$ ,  $\dot{l}_i$  und  $\ddot{l}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  berechnet werden.

Im Folgenden soll die Plattform beispielhaft einer Bahn folgen, wie sie für den seilbasierten Logistik-Roboter typisch wäre. Diese Bahn besteht aus einer Aneinanderreihung gerader Streckenabschnitte, die sowohl horizontal, vertikal als auch diagonal verlaufen und dabei die Eckfächer des Regals anfahren (siehe Abb. 5.25). Zwischen den Streckenabschnitten bleibt die Plattform für knapp eine Sekunde vor dem Regalfach stehen. Während dieser ruhenden Abschnitte findet praktisch der Ein- bzw. Auslagerungsvorgang statt, der in der Realität ca. 3–4 s dauert. Damit sollen ohne Beschränkung der Allgemeinheit Bahnen simuliert werden, die typisch für logistische Einzel- und Doppelspielfahrten sind. Jeder Streckenabschnitt wird durch eine entsprechende Trajektorienplanung gemäß der oben erwähnten Methode der minimalen Zeittrajektorie realisiert.

In Abb. 5.25 wird die Bewegung des Bezugspunkts  $\mathcal{P}$  der Plattform entlang der minimalen Zeittrajektorie dargestellt (durchgezogen-punktierte Linien, die Teilstrecken werden in alphabetischer Reihenfolge beginnend bei  $A$  und endend bei  $I$  abgefahren), wobei die Position von  $\mathcal{P}$  zu äquidistanten Zeitpunkten aufgenommen wurde. Daran kann aus den unterschiedlichen Abständen zwischen den Trajektorienpunkten die Geschwindigkeit der Plattform qualitativ visualisiert werden. Große Abstände bedeuten somit auch große Geschwindigkeiten. Die Gesamt-Trajektorie selbst setzt sich aus acht „elementaren“ Trajektorien zusammen, wie sie oben erklärt wurden. Zwischen diesen Teiltrajektorien steht die Plattform für 0.9 s still bevor sie sich weiter bewegt. Die von 1 bis 8 nummerierten Kreise stellen die festen punktförmigen Seilaustrittspunkte dar, während der durchgezogene Rahmen die äußeren Abmessungen des Regals kennzeichnet.



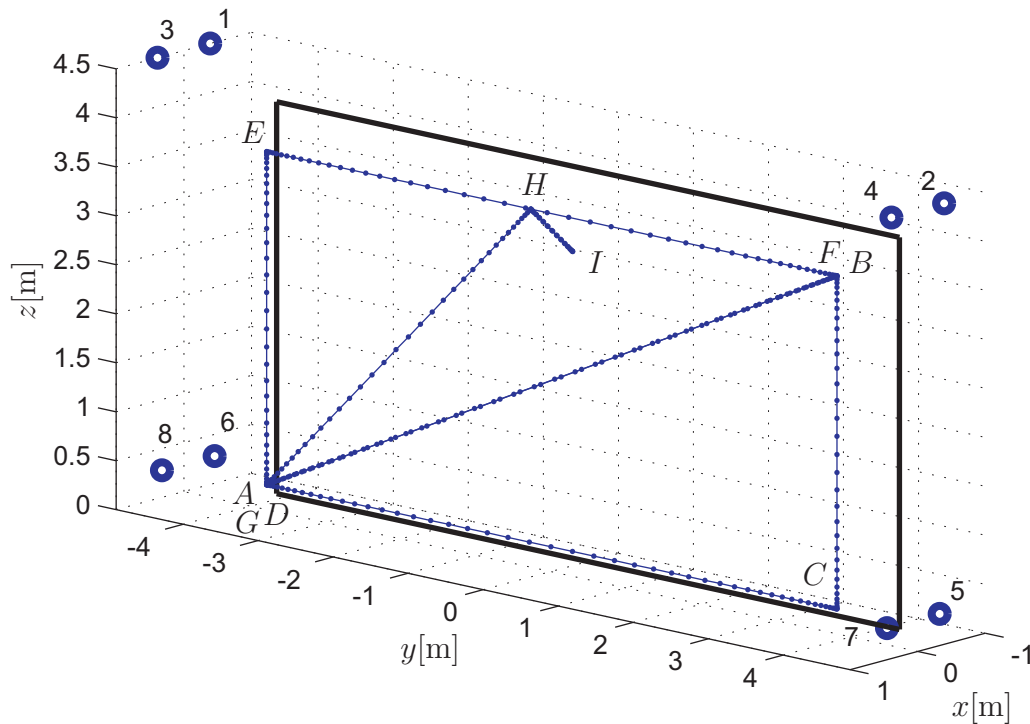


Abbildung 5.25: Trajektorie des plattformfesten Bezugspunkts  $\mathcal{P}$  der Plattform, wobei die Teilstrecken in alphabetischer Reihenfolge abgefahren werden.

Anhand Abb. 5.26 ist erkennbar, dass die für diese Trajektorie benötigte minimale Zeit ca. 27.5s beträgt.

In Abb. 5.27 ist die entsprechende Trajektorie im Inertialsystem  $\mathcal{B}$  dargestellt und der Verlauf aller Komponenten der Plattform-Position, -Geschwindigkeit und -Beschleunigung in  $x$ ,  $y$  und  $z$ -Richtung erkennbar.

Abb. 5.28 stellt die zeitlichen Verläufe der Seillängen, -Geschwindigkeiten und -Beschleunigungen dar. Anhand des zeitlichen Verlaufs der Seillängen ist erkennbar, wie viel Seil auf die Trommel mindestens aufgewickelt werden muss, da diese Trajektorie bis in die äußeren Ecken des Regals fährt, d.h. alle äußeren Regalfächer „besucht“.

### 5.5.2 Inverse Dynamik

Die inverse Dynamik befasst sich mit der Fragestellung, welche Antriebskräfte bzw. -momente erforderlich sind, um eine vorgegebene Bewegung des Endeffektors zu realisieren (Asada und Slotine 1986; de Wit u. a. 1996). Konkret heißt es für den Seilroboter, dass bei Vorgabe einer zeitlich veränderlichen Bewegung  $\mathbf{x}_P(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_P(t)$

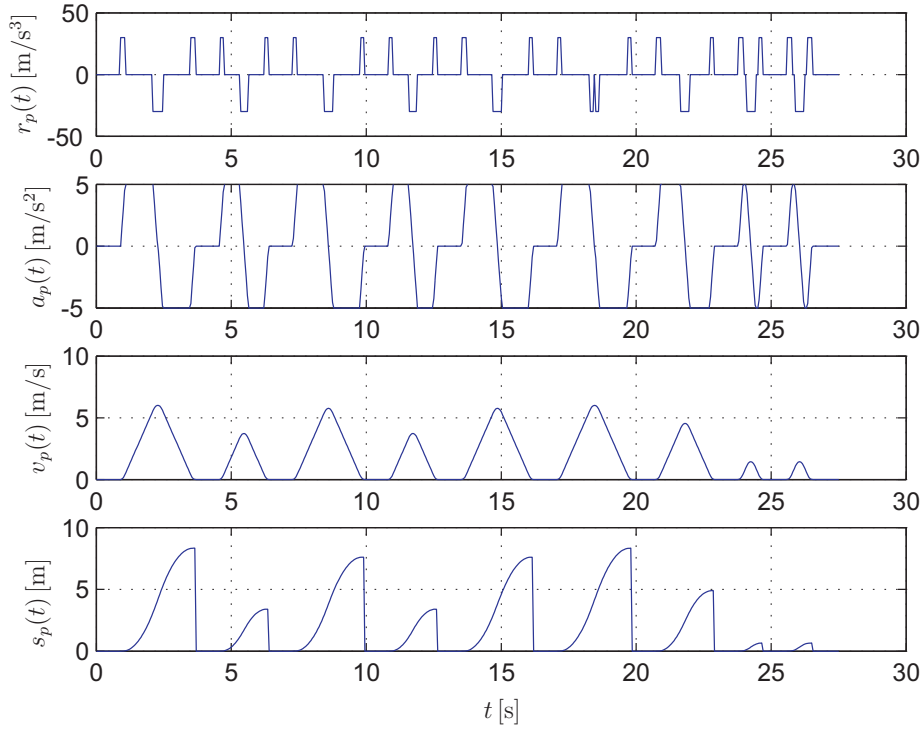


Abbildung 5.26: Trajektorie des plattformfesten Bezugspunkts  $\mathcal{P}$  der Plattform in Bahnkoordinaten  $r_p(t)$ ,  $a_p(t)$ ,  $v_p(t)$  und  $s_p(t)$ .

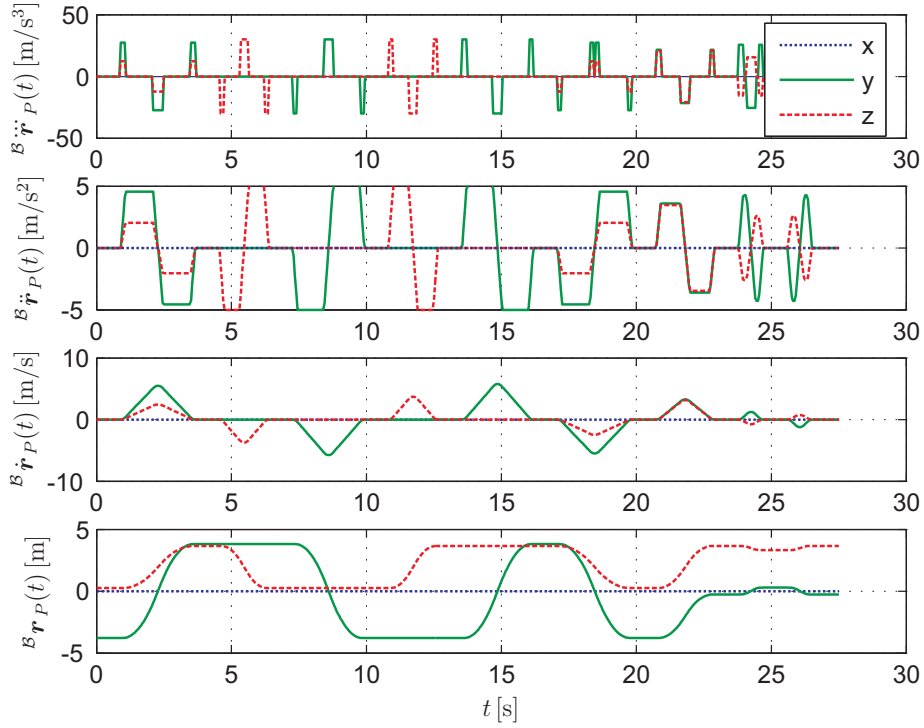


Abbildung 5.27: Trajektorie des plattformfesten Bezugspunkts  $\mathcal{P}$  der Plattform in Plattformkoordinaten  ${}^B\mathbf{r}_P(t)$ ,  ${}^B\dot{\mathbf{r}}_P(t)$ ,  ${}^B\ddot{\mathbf{r}}_P(t)$ ,  ${}^B\dddot{\mathbf{r}}_P(t)$  (nur Position).

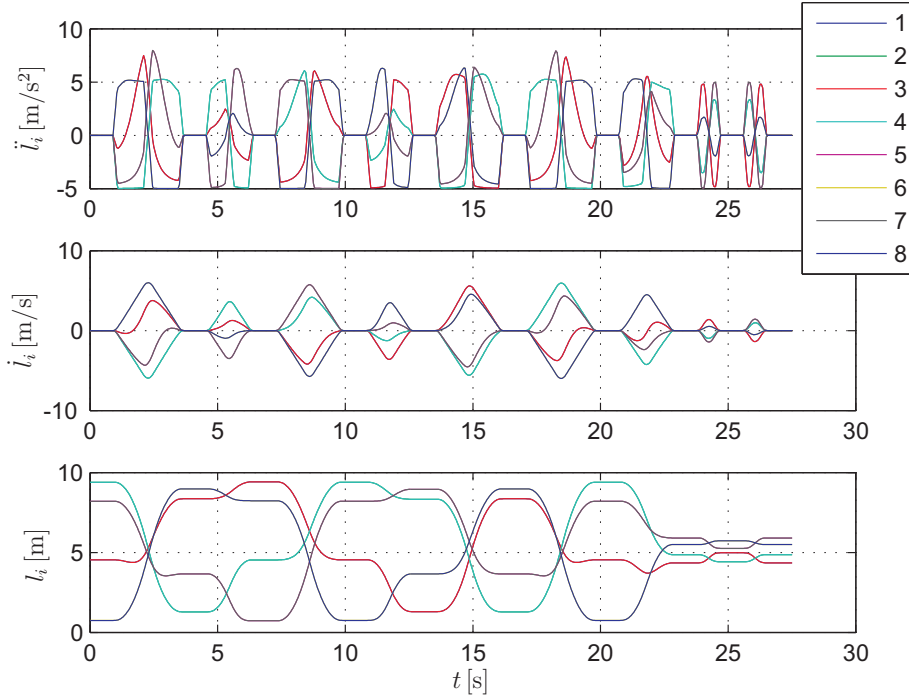


Abbildung 5.28: Trajektorie der acht Seile  $l_i$ ,  $\dot{l}_i$  und  $\ddot{l}_i$  mit  $1 \leq i \leq 8$ .

und  $\ddot{\mathbf{x}}_P(t)$  der Plattform-Pose – welche beispielsweise durch die einfache Trajektoriengenerierung aus dem vorigen Abschnitt erzeugt werden kann – die für diese Bewegung erforderliche Seilkraftverteilung  $\mathbf{f}(t)$  zu ermitteln ist. Über die berechneten Seilkräfte lässt sich anschließend abschätzen, welche (mechanischen) Antriebskräfte bzw. -Momente für die Realisierung der Plattform-Bewegung erforderlich sind. Die inverse Dynamik ermöglicht sowohl eine Auslegung der zu verwendenden Motoren als auch einen Reglerentwurf für eine Kraft- bzw. Momentenvorsteuerung.

Grundlage für die inverse Dynamik sind die Bewegungsgleichungen des Seilroboters gemäß Gl. (5.56). Da die Bewegung der Plattform, sprich die Plattform-Trajektorie vorgegeben wird, lässt sich die gesuchte, zeitlich veränderliche Seilkraftverteilung  $\mathbf{f}(t)$  zunächst folgendermaßen isolieren:

$${}^B \mathbf{A}^\top(t) \mathbf{f}(t) = \underbrace{\mathbf{M}(\mathbf{x}_P(t)) \ddot{\mathbf{x}}_P(t) + \mathbf{w}_K(\mathbf{x}_P(t), \dot{\mathbf{x}}_P(t)) - {}^B \mathbf{w}}_{{}^B \mathbf{w}_{\text{dyn}}(t)}. \quad (5.75)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im Folgenden die Angabe der Zeitabhängigkeit fortgelassen.

Es wurde bereits in Abschnitt 5.3 erläutert, dass dieses Gleichungssystem unterbestimmt ist, d. h. es existiert eine unendliche Anzahl an möglichen Seilkraftverteilungen. Des Weiteren müssen die vorab erwähnten Seilkraftgrenzen gemäß Gl. (5.65) berücksichtigt werden, um gültige Seilkraftverteilungen zu erhalten.

Hierbei ist es nun günstig, aus dem unendlichen Lösungsraum der Seilkraftverteilung die betragsmäßig minimale Seilkraftverteilung zu bestimmen, woraus das folgende zu lösende quadratische Optimierungsproblem folgt:

$$\min_{\mathbf{f}} \mathcal{Z}(\mathbf{f}) = \frac{1}{2} \mathbf{f}^\top \mathbf{G} \mathbf{f} \quad (5.76a)$$

$$\text{u. d. N. } {}^B \mathbf{A}^\top \mathbf{f} = {}^B \mathbf{w}_{\text{dyn}}, \quad (5.76b)$$

$$\mathbf{f}_{\min} \leq \mathbf{f} \leq \mathbf{f}_{\max}, \quad (5.76c)$$

mit der symmetrischen, positiv definiten Wichtungsmatrix  $\mathbf{G}$ .

In Abb. 5.29 werden die zur obigen Trajektorie gehörigen zeitabhängigen Seilkraftverläufe dargestellt, wobei zu jedem Zeitpunkt die minimale Seilkraftverteilung unter Berücksichtigung der dynamischen Kräfte gemäß Gl. (5.76) berechnet wird. Die

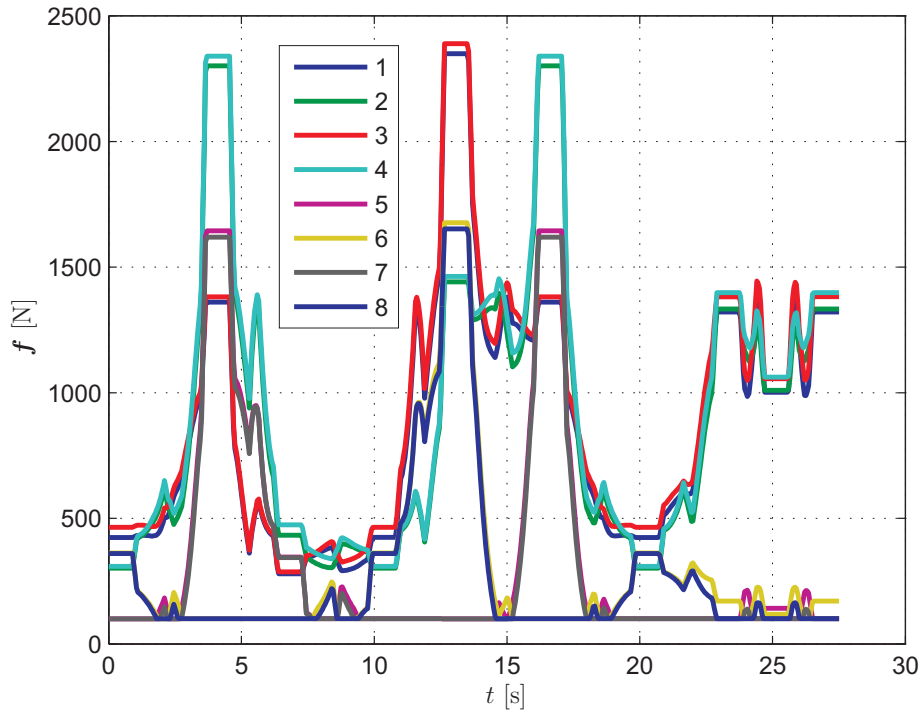


Abbildung 5.29: Seilkraftverlauf für die zeitminimale Trajektorie.

gültigen Seilkräfte liegen dabei im Bereich  $\mathbf{f}_{\min} = 100 \text{ N} \leq \mathbf{f}(t) \leq \mathbf{f}_{\max} = 5000 \text{ N}$ . Daraus ist erkennbar, dass die minimalen Seilkräfte für den gesamten Zeitraum eingehalten werden. Währenddessen kommen die Seilkräfte für diese Trajektorie nicht an die maximalen Seilkraftgrenzen heran und liegen unter 2500 N. Die größten Seilkräfte werden dabei im oberen linken und rechten Fach des Hochregals erreicht. Deutlich erkennbar sind auch die Ruhephasen konstanter Seilkräfte, in denen die Plattform für 0.9 s vor dem Fach steht, bevor sie die nächste Teilstrecke absolviert.

Der zeitliche mechanische Leistungsverlauf sowohl der einzelnen als auch gesamten Motoren wird in Abb. 5.30 dargestellt. Dabei berechnet sich die Leistung der

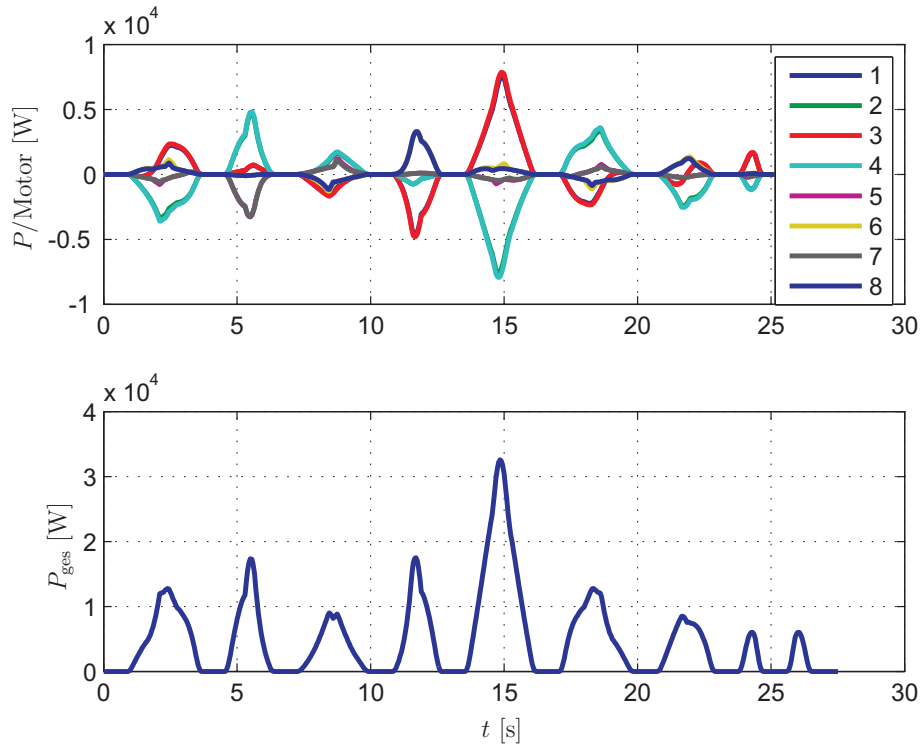


Abbildung 5.30: Zeitlicher Verlauf der mechanischen Leistung der einzelnen Motoren (oben) und der Gesamtleistung (unten).

einzelnen Motoren aus

$$P_i(t) = f_i(t) \cdot \dot{l}_i(t), \quad 1 \leq i \leq n \quad (5.77)$$

und die Gesamtleistung gemäß

$$P_{\text{ges}}(t) = \sum_{i=1}^n |f_i(t) \cdot \dot{l}_i(t)|. \quad (5.78)$$

Zu erkennen sind hierbei die Leistungsspitzen, maßgeblich hervorgerufen durch den ansteigenden und abfallenden Verlauf der Seilgeschwindigkeit (vgl. Abb. 5.28, Mitte). Entsprechend müssen Motoren verwendet werden, die (mechanische) Spitzenleistungen von jeweils mindestens 8kW erreichen können.

### 5.5.3 Grundlagen der optimalen Steuerung

Die im vorigen Abschnitt behandelten Teiltrajektorien wurden jeweils auf einer geraden Bahn von Anfangspunkt nach Endpunkt realisiert (PTP<sup>8</sup>-Trajektorien-Planung,

<sup>8</sup>engl. Point-To-Point, Punkt-zu-Punkt, siehe z. B. Spong u. a. (2006)

siehe auch Abb. 5.25), wobei lediglich kinematische Beschränkungen wie maximale Geschwindigkeit und Beschleunigung und maximaler Ruck der Plattform vorgegeben sind. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen, dass sowohl Geschwindigkeit als auch Beschleunigung in  $A$  und  $B$  Null sind, ergaben sich geschlossene Lösungen zur Bestimmung der zeitminimalen Trajektorien (Abschnitt C), wohlgemerkt für gerade Bahnkurven.

Die Dynamik des Systems wurde bei der Trajektoriengenerierung bisher nicht berücksichtigt<sup>9</sup>. Dabei macht es durchaus Sinn, diese in die Trajektorienplanung zu integrieren. Dadurch können PTP-Trajektorien generiert werden, die speziell für jenes System ausgelegt sind und ein Optimum beispielsweise in Bezug auf minimal benötigter Zeit und Energie bilden. Die Bestimmung dieser optimalen Bewegungsabläufe unter Berücksichtigung der Dynamik des Systems ist Aufgabe der optimalen Steuerung, wobei neben den Zuständen des Systems sowohl die Steuervariablen als auch, gegebenenfalls, die benötigte Endzeit Teil der zu optimierenden Variablen sind. Es existieren zahlreiche Anwendungen der optimalen Steuerung, sowohl in der Robotik (von Stryk 1994; von Stryk und Schlemmer 1994; von Stryk 1993; Breun 2007; Riemenschneider 2011), der Fahrzeugtechnik (Riede 2006), der Flugzeugtechnik (Geiger u. a. 2006) als auch in der Chemie (Büskens 1993).

### Optimalsteuerungs-Probleme

Im Folgenden wird die Problemstellung der Optimalen Steuerung beschrieben. Gegeben sei das folgende nichtlineare Zustandsmodell des dynamischen Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (5.79)$$

mit

$t \in \mathbb{R}$  : Zeit,

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  : Zustandsvariablen,

$\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  : Steuervariablen,

$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar.

Gesucht wird die Steuerfunktion  $\mathbf{u}(t)$ , welche eine Zielfunktion der Form

$$\mathcal{Z}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \varphi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad (5.80)$$

---

<sup>9</sup>Im vorigen Abschnitt wurde zunächst die einfache zeitminimale Trajektorie generiert und erst anschließend die optimale Seilkraftverteilung berechnet!

minimiert, wobei

$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,

$f_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,

$t_0 \in \mathbb{R}$  : vorgegebene Anfangszeit,

$t_f \in \mathbb{R}$  : vorgegebene Endzeit.

Sowohl die Dynamik gemäß Gl. (5.56) als auch das Zielfunktional aus Gl. (5.80) des vorliegenden Regalbediengeräts hängen nicht explizit von der Zeit ab, d. h. es liegt ein sogenannter autonomer Steuerprozess (Gretschko 2007) vor. Des Weiteren kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Anfangszeit  $t_0 = 0$  gesetzt werden. Damit lautet das vollständige autonome Optimalsteuerungs-Problem

$$\min_{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)} \quad \mathcal{Z}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \varphi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad (5.81a)$$

$$\text{u. d. N.} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (5.81b)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (5.81c)$$

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f, \quad (5.81d)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \leq \mathbf{0}, \quad (5.81e)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{0}, \quad (5.81f)$$

$$0 \leq t \leq t_f. \quad (5.81g)$$

wobei Gl. (5.81c) und Gl. (5.81d) die Randbedingungen am Zeitanfang und -Ende darstellen. Mit Gl. (5.81e) und Gl. (5.81f) werden sowohl Gleichungs- als auch Ungleichungs-Beschränkungen der Zustands- und Steuervariablen berücksichtigt.

In vielen Fällen ist es sinnvoll, die Endzeit  $t_f$  nicht explizit vorgeben zu müssen. Möchte man eine zeitminimale Trajektorie haben, ist die optimale Zeit a priori nicht zu bestimmen. Zu diesem Zweck wird  $t_f$  Teil der zu optimierenden Variablen, indem Gl. (5.81) auf das Zeitintervall  $0 \leq s \leq 1$  transformiert wird. Mit  $s = \frac{t}{t_f}$  bzw.

$ds = \frac{dt}{t_f}$  folgt zunächst  $dt = t_f \cdot ds$  und substituiert das Optimalsteuerungs-Problem mit freier bzw. variabler Endzeit

$$\min_{\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), t_f} \quad \mathcal{Z}(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), t_f) = \varphi(\mathbf{x}(1), t_f) + \int_0^1 t_f \cdot f_0(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)) ds \quad (5.82a)$$

$$\text{u. d. N.} \quad \frac{d\mathbf{x}}{ds} = t_f \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)), \quad (5.82b)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (5.82c)$$

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_f, \quad (5.82d)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)) \leq \mathbf{0}, \quad (5.82e)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)) = \mathbf{0}, \quad (5.82f)$$

$$0 \leq s \leq 1. \quad (5.82g)$$

Man beachte dabei die durch die Substitution geführte Anpassung der Integrationsgrenzen und die zusätzliche Multiplikation des Integranden und der rechten Seite der Zustandsgleichung mit der Optimierungsvariablen  $t_f$ .

Die Optimalsteuerungs-Probleme in Gl. (5.81) bzw. Gl. (5.82) liegen in der sogenannten BOLZA-Form vor (Büskens 1993; Gretscho 2007). Sie sind wegen des in dem Zielfunktional integrativen Anteils sowohl für die numerische Auswertung als auch programmtechnische Implementierung nicht vorteilhaft. Zweckmäßigerweise eignet sich dafür die sogenannte MAYER-Form des Optimalsteuerungs-Problems, bei welcher ausschließlich der Zustand zum Endzeitpunkt minimiert wird, so dass

$$\mathcal{Z}(\mathbf{x}(1), F_0(1)) = \varphi(\mathbf{x}(1)) + F_0(1). \quad (5.83)$$

Dabei ist  $F_0(s)$  eine zusätzliche (skalare) Zustandsvariable gemäß

$$F_0(s) = \int_0^s t_f \cdot f_0(\mathbf{x}(\tilde{s}), \mathbf{u}(\tilde{s})) d\tilde{s}, \quad (5.84)$$

welche durch das Anfangswertproblem

$$\frac{dF_0}{ds} = t_f \cdot f_0(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)), \quad F_0(0) = 0 \quad (5.85)$$



gelöst werden kann. Daraus folgt somit das vollständige Optimalsteuerungs-Problem mit variabler Endzeit in MAYER-Form

$$\min_{\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), t_f, F_0(s)} \mathcal{Z}(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), t_f, F_0) = \varphi(\mathbf{x}(1)) + F_0(1) \quad (5.86a)$$

$$\text{u. d. N. } \frac{d\mathbf{x}}{ds} = t_f \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)), \quad (5.86b)$$

$$\frac{dF_0}{ds} = t_f \cdot f_0(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)), \quad (5.86c)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (5.86d)$$

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_f, \quad (5.86e)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)) \leq \mathbf{0}, \quad (5.86f)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)) = \mathbf{0}, \quad (5.86g)$$

$$0 \leq s \leq 1. \quad (5.86h)$$

### Numerische Lösungsverfahren

Die Optimalsteuerungs-Probleme nach Gl. (5.81) oder Gl. (5.82) sind wegen der zeitkontinuierlichen Zustände und Steuerungen  $\mathbf{x}(s)$  und  $\mathbf{u}(s)$  im Prinzip unendlich-dimensionale Optimierungsprobleme und lassen sich im Allgemeinen nicht geschlossen lösen. Aus diesem Grunde muss auf numerische Lösungsverfahren zurückgegriffen werden. Diese lassen sich dabei in *direkte* und *indirekte* Verfahren einteilen.

Die indirekten Verfahren erfordern die konkrete Anwendung der aus der Optimalsteuerungs-Theorie notwendigen Bedingung gemäß dem Minimumprinzip nach Pontryagin und Gamkrelidze (1986). Dabei müssen unter anderem die sogenannten adjungierten Differentialgleichungen (Breun 2007) bereitgestellt werden. Dies zeichnet gleichzeitig den Nachteil jener Verfahren aus, da für diese Lösungsmethode eine gewisse Vorarbeit geleistet werden muss und ein Vorwissen an Optimalsteuerungs-Theorie erforderlich ist (von Stryk und Schlemmer 1994). Die indirekten Verfahren führen auf Mehrpunkt-Randwertprobleme und können mit entsprechenden Randwertproblemlösern gelöst werden, die auf der Mehrzielmethode basieren (Bulirsch 1971; Oberle und Grimm 2001).

Direkte Verfahren zeichnen sich dadurch aus, dass das unendlich-dimensionale Optimalsteuerungs-Problem durch Diskretisierung der Zustands- und Steuergrößen in ein endlich-dimensionales, nichtlineares Optimierungsproblem überführt wird. Dabei werden die Zustandsgleichungen an sogenannten Kollokationspunkten ausgewertet. Die numerische Lösung dieser im Allgemeinen großen Optimierungsprobleme liefern schließlich die aus der nichtlinearen Optimierung bekannten Algorithmen wie

beispielsweise der SQP<sup>10</sup>-Algorithmus oder das Innere-Punkte-Verfahren (Gill u. a. 1997; Nocedal und Wright 2006; Luenberger und Ye 2008; Griva u. a. 2009; Gill u. a. 1981). Ein Überblick über die numerischen Verfahren von Optimalsteuerungs-Problemen findet sich beispielsweise in von Stryk und Schlemmer (1994); Büskens (1993); Breun (2007). In dieser Arbeit soll die Lösung des Optimalsteuerungs-Problems mit direkten Verfahren bestimmt werden. Daher wird im folgenden Abschnitt eine kurze Übersicht zum direkten Kollokationsverfahren gegeben.

### Direkte Kollokationsverfahren

Grundlage für das folgende direkte Verfahren bildet die Diskretisierung des Zeitintervalls  $[0, 1]$  in  $N$  gleichgroße Intervalle, d. h.  $N + 1$  äquidistante Zeitpunkte

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{N-1} < s_N = 1 \quad (5.87)$$

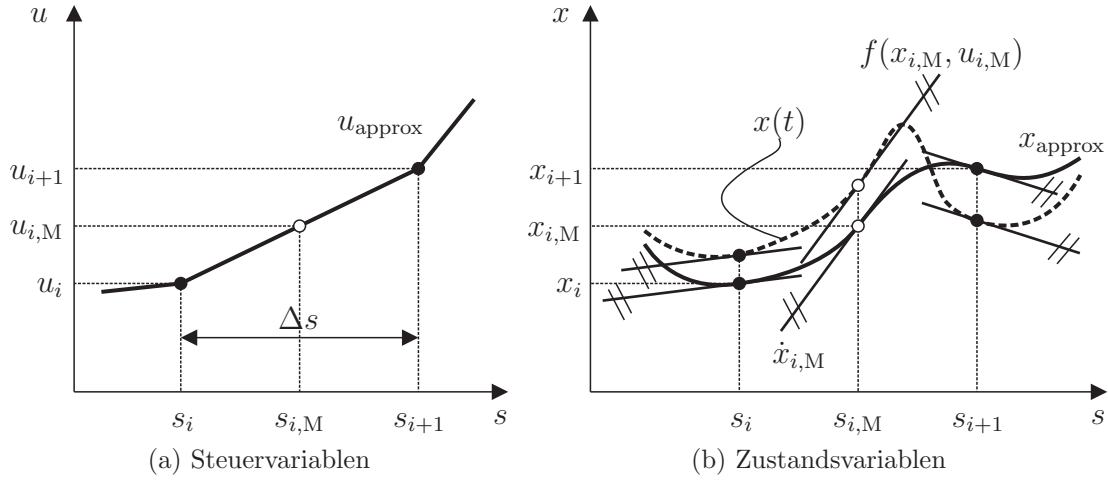
mit der Länge eines jeden Zeitintervalls  $\Delta s = \frac{1}{N}$ . In jedem Zeitpunkt werden Näherungswerte der Zustände  $\mathbf{x}_i := \mathbf{x}(s_i)$ ,  $\mathbf{F}_{0,i} := F_0(s_i)$  und Steuergrößen  $\mathbf{u}_i := \mathbf{u}(s_i)$ ,  $0 \leq i \leq N$  mit Hilfe von numerischen Integrationsverfahren, wie beispielsweise den RUNGE-KUTTA-Verfahren bestimmt. In der praktischen Anwendung haben sich allerdings so genannte Kollokationsverfahren bewährt, womit sich das durch die Diskretisierung entstandene nichtlineare Optimierungsproblem effizienter lösen lässt (Büskens 1993).

Ein weit verbreiteter Ansatz (z. B. von Stryk und Schlemmer 1994; Geiger u. a. 2006; Hargraves und Paris 1987) besteht darin, die Steuergrößen durch stückweise lineare Funktionen und die Zustandsgrößen durch kubische HERMITESche Polynome zu approximieren. Dabei genügt die erste Ableitung eines jeden HERMITESchen Polynoms der Zustandsgleichung

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\mathbf{F}}_{0,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \\ f_0(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

in den Zeitpunkten  $s_i, 0 \leq i \leq N$ , so dass eine stetig differenzierbare Approximation der Zustände erreicht wird. Des Weiteren wird der so genannte Kollokationspunkt  $s_{i,M}, 1 \leq i \leq N$  jeweils im Mittelpunkt eines jeden Intervalls definiert (Abb. 5.31). Damit besteht nun das nichtlineare Optimierungsproblem darin, unter Minimierung des Zielfunktional die Gleichungs- und Ungleichungs-Nebenbedingungen in den Zeitpunkten  $s_i, 0 \leq i \leq N$  und die Zustandsgleichungen sowohl in den Zeit-

<sup>10</sup>Sequential Quadratic Programming

Abbildung 5.31: Diskretisierung der Steuer- und Zustandsvariablen für  $x, u \in \mathbb{R}$ .

punkten  $s_i, 0 \leq i \leq N$  als auch in den Kollokationspunkten  $s_{i,M}, 1 \leq i \leq N$  zu erfüllen. In den Kollokationspunkten ergeben sich die approximierten Steuergrößen

$$\mathbf{u}_{i,M} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i+1}) \quad (5.89)$$

und aufgrund der HERMITESchen Polynomapproximation die Zustände

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i,M} \\ F_{0,i,M} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1} \\ F_{0,i} + F_{0,i+1} \end{bmatrix} + \frac{\Delta s \cdot t_f}{8} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_{i+1} \\ \dot{F}_{0,i} - \dot{F}_{0,i+1} \end{bmatrix}. \quad (5.90)$$

Schließlich muss gelten

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i,M}, \mathbf{u}_{i,M}) - \dot{\mathbf{x}}_{i,M} \\ f_0(\mathbf{x}_{i,M}, \mathbf{u}_{i,M}) - \dot{F}_{0,i,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.91)$$

wobei

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{i,M} \\ \dot{F}_{0,i,M} \end{bmatrix} = \frac{3}{2 \Delta s \cdot t_f} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i \\ F_{0,i+1} - F_{0,i} \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i + \dot{\mathbf{x}}_{i+1} \\ \dot{F}_{0,i} + \dot{F}_{0,i+1} \end{bmatrix}. \quad (5.92)$$

Damit lässt sich das diskretisierte Optimalsteuerungs-Problem als folgendes endliche, nichtlineare Problem darstellen. Sei

$$\mathbf{y} = [\mathbf{x}(s_0), \mathbf{u}(s_0), F_0(s_0), \mathbf{x}(s_1), \mathbf{u}(s_1), F_0(s_1), \dots, \mathbf{x}(s_N), \mathbf{u}(s_N), F_0(s_N), t_f]^\top \quad (5.93)$$

der Vektor der zu optimierenden Variablen, dann lautet das nichtlineare Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{y}} \quad \mathcal{Z}(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}(1)) + F_0(1) \quad (5.94a)$$

$$\text{u. d. N.} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i,M}, \mathbf{u}_{i,M}) - \dot{\mathbf{x}}_{i,M} = \mathbf{0}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (5.94b)$$

$$f_0(\mathbf{x}_{i,M}, \mathbf{u}_{i,M}) - \dot{F}_{0,i,M} = 0, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (5.94c)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (5.94d)$$

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_f, \quad (5.94e)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \leq \mathbf{0}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (5.94f)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) = \mathbf{0}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (5.94g)$$

welches beispielsweise mit `fmincon` aus der MATLAB<sup>TM</sup> OPTIMIZATION TOOLBOX<sup>TM</sup> (Palm 2004; The Mathworks b, a) numerisch gelöst werden kann. Aufgrund der großen, jedoch dünn Gradienten der Zielfunktion und Nebenbedingungen eignen sich hierfür spezielle nichtlineare Optimierungslöser wie beispielsweise die Funktion `e04vh` aus der NAG<sup>®</sup>-Bibliothek (Numerical Algorithms Group 2010).

#### 5.5.4 Optimalsteuerungs-Problem des seilbasierten Regalbediengeräts

Das für die Optimalsteuerung benötigte Zustandsmodell basiert auf den Bewegungsgleichungen des seilbasierten Regalbediengeräts gemäß Gl. (5.56). Die Forderung, dass die KARDAN-Winkel und deren Ableitungen gemäß Gl. (5.71) für  $s \in [0, 1]$  Null sind, damit die Plattform stets waagrecht ist, liefert ein differential-algebraisches Gleichungssystem (DAE) bestehend aus dem (differentiellen) Impulssatz und dem (algebraischen) Momentengleichgewicht und vereinfacht sich zu

$$m_P {}^B \ddot{\mathbf{r}}_P = {}^B \mathbf{A}_t^\top \mathbf{f} + {}^B \mathbf{w}_t \quad (5.95a)$$

$$\mathbf{0} = {}^B \mathbf{A}_r^\top \mathbf{f} + {}^B \mathbf{w}_r, \quad (5.95b)$$

wobei

$${}^B \mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} {}^B \mathbf{A}_t^\top \\ {}^B \mathbf{A}_r^\top \end{bmatrix} \quad (5.96)$$

in eine „translatorische“ und eine „rotatorische“ Strukturmatrix aufgeteilt wird. Entsprechend gilt  ${}^B \mathbf{w} = [{}^B \mathbf{w}_t, {}^B \mathbf{w}_r]^\top$ .

Randbedingungen sind einerseits die vorgegebene Anfangs- und Endposition der Plattform und andererseits die Forderung, dass am Start und Ziel sowohl Plattform-Geschwindigkeit als auch -Beschleunigung Null sind:

$${}^{\mathcal{B}}\mathbf{r}_P(0) = {}^{\mathcal{B}}\mathbf{r}_{P,0} \qquad {}^{\mathcal{B}}\mathbf{r}_P(1) = {}^{\mathcal{B}}\mathbf{r}_{P,f} \qquad (5.97a)$$

$${}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{r}}_P(0) = \mathbf{0} \qquad {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{r}}_P(1) = \mathbf{0} \qquad (5.97b)$$

$${}^{\mathcal{B}}\ddot{\mathbf{r}}_P(0) = \mathbf{0} \qquad {}^{\mathcal{B}}\ddot{\mathbf{r}}_P(1) = \mathbf{0}. \qquad (5.97c)$$

Des Weiteren ergeben sich zusätzliche Beschränkungen, die für  $t \in [t_0, t_f]$  gelten müssen. So darf die Plattform in diesem Zeitraum die Länge und Höhe des Regals und vorgegebene maximale Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Rücke nicht überschreiten. Minimale und maximale Seilkräfte sind ebenfalls einzuhalten. Es ergeben sich somit folgende Ungleichungs-Beschränkungen für  $t \in [t_0, t_f]$ :

$${}^{\mathcal{B}}\mathbf{r}_{P,\min} \leq {}^{\mathcal{B}}\mathbf{r}_P(s) \leq {}^{\mathcal{B}}\mathbf{r}_{P,\max}, \qquad (5.98a)$$

$$\|{}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{r}}_P(s)\|_2 \leq v_{P,\max}, \qquad (5.98b)$$

$$\|{}^{\mathcal{B}}\ddot{\mathbf{r}}_P(s)\|_2 \leq a_{P,\max}, \qquad (5.98c)$$

$$\|{}^{\mathcal{B}}\ddot{\mathbf{r}}_P(s)\|_2 \leq r_{P,\max}, \qquad (5.98d)$$

$$\mathbf{f}_{\min} \leq \mathbf{f}(s) \leq \mathbf{f}_{\max}. \qquad (5.98e)$$

Folgende Zielfunktionen werden untersucht. Zunächst ist es zweckmäßig, die Endzeit  $t_f$  zu minimieren. Dies geschieht mit der einfachen Zielfunktion

$$\varphi(t_f) = t_f. \qquad (5.99)$$

Außerdem ist es sinnvoll die Seilkraftverteilung so gering wie möglich zu halten, um minimale Energie zu verbrauchen:

$$f_{0,1} = \|\mathbf{f}(s)\|_2 \qquad (5.100)$$

Eine optimale Trajektorie nach minimalem Leistungsverbrauch zu generieren wird folgendermaßen dargestellt:

$$f_{0,2} = \|\mathbf{f}^\top(s) \cdot \dot{\mathbf{l}}(s)\|_2, \qquad (5.101)$$

wobei die Seilgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{l}}$  aus der inversen Kinematik ermittelt wird (Abschnitt 5.2.4). Ein weiteres Kriterium wäre, den Ruck der Plattform zu minimieren, um das Ladegut gegen starke Stöße zu schonen, da es unter Umständen zerbrechlich ist:

$$f_{0,3} = \|\ddot{\mathbf{r}}_P(s)\|_2. \qquad (5.102)$$

Weitere Zielfunktionen können angebracht sein, wie beispielsweise die Vermeidung zu schneller Kraftänderungen  $\dot{\mathbf{f}}(t)$ , um die Motoren zu schonen

$$f_{0,4} = \|\dot{\mathbf{f}}(s)\|_2, \quad (5.103)$$

sowie gewichtete Linearkombinationen der bereits erwähnten Kriterien.

Im Anschluss werden die Zustandsgleichungen unter Berücksichtigung der Randbedingungen, Beschränkungen und Zielfunktionen hergeleitet. Dabei wird Folgendes beachtet:

- Da die Plattform-Beschleunigungen in den Randbedingungen explizit angegeben sind, müssen sie den Zustandsvariablen hinzugefügt werden.
- Außerdem sollen minimale Kraftänderungen in die Optimierung mit einfließen. Dies wird realisiert, indem die Kraftänderung den Steuervariablen zugeordnet wird.

Zunächst ergeben sich die differential-algebraischen Bewegungsgleichungen zu

$${}^B\ddot{\mathbf{r}}_P = \frac{1}{m_P} ({}^B\mathbf{A}_t^\top \mathbf{f} + {}^B\mathbf{w}_t) \quad (5.104a)$$

$${}^B\ddot{\mathbf{r}}_P = \mathbf{u}_1 \quad (5.104b)$$

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{u}_2 \quad (5.104c)$$

$$\mathbf{0} = {}^B\mathbf{A}_r^\top \mathbf{f} + {}^B\mathbf{w}_r. \quad (5.104d)$$

Diese werden nun in den Zustandsraum überführt, wobei folgende Zustandsvariablen eingeführt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= {}^B\mathbf{r}_P, \\ \mathbf{x}_2 &= {}^B\dot{\mathbf{r}}_P, \\ \mathbf{x}_3 &= {}^B\ddot{\mathbf{r}}_P, \\ \mathbf{x}_4 &= \mathbf{f} \end{aligned} \quad (5.105)$$

und

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^\top, \mathbf{x}_2^\top, \mathbf{x}_3^\top, \mathbf{x}_4^\top]^\top. \quad (5.106)$$

Dies führt schließlich zu

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2, \quad (5.107a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_3, \quad (5.107b)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{u}_1, \quad (5.107c)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_4 = \mathbf{u}_2, \quad (5.107d)$$

$$\mathbf{0} = {}^B\mathbf{A}_r^\top \mathbf{x}_4 + {}^B\mathbf{w}_r, \quad (5.107e)$$

$$\mathbf{0} = \frac{1}{m_P} ({}^B\mathbf{A}_t^\top \mathbf{x}_4 + {}^B\mathbf{w}_t) - \mathbf{x}_3, \quad (5.107f)$$

bzw. zusammengefasst

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_d(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (5.108a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (5.108b)$$

Man beachte die zusätzliche algebraische Gl. (5.107f), welche im Prinzip den Impulssatz der Plattform darstellt. Es ergeben sich die Randbedingungen

$$\mathbf{x}_1(0) = {}^B\mathbf{r}_{P,0} \quad \mathbf{x}_1(1) = {}^B\mathbf{r}_{P,f}, \quad (5.109a)$$

$$\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{0} \quad \mathbf{x}_2(1) = \mathbf{0}, \quad (5.109b)$$

$$\mathbf{x}_3(0) = \mathbf{0} \quad \mathbf{x}_3(1) = \mathbf{0}, \quad (5.109c)$$

$$\mathbf{x}_4(0) = \mathbf{f}_0 \quad \mathbf{x}_4(1) = \mathbf{f}_f, \quad (5.109d)$$

wobei die Seilkraftverteilungen  $\mathbf{f}_0$  und  $\mathbf{f}_f$  aus der statischen Seilkraftberechnung (Abschnitt 5.3) bestimmt werden können. Die Ungleichungs-Nebenbedingungen ergeben sich zu

$${}^B\mathbf{r}_{P,\min} \leq \mathbf{x}_1(s) \leq {}^B\mathbf{r}_{P,\max}, \quad (5.110a)$$

$$\|\mathbf{x}_2(s)\|_2 \leq v_{P,\max}, \quad (5.110b)$$

$$\|\mathbf{x}_3(s)\|_2 \leq a_{P,\max}, \quad (5.110c)$$

$$\mathbf{f}_{\min} \leq \mathbf{x}_4(s) \leq \mathbf{f}_{\max} \quad (5.110d)$$

$$\|\mathbf{u}_1(s)\|_2 \leq r_{P,\max} \quad (5.110e)$$

und kompakt

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{0}, \quad (5.111)$$

während die Gleichungs-Nebenbedingungen den algebraischen Gleichungen gemäß Gl. (5.107e) und Gl. (5.107f) entsprechen. Gemäß den verschiedenen Kriterien aus Gl. (5.100) bis Gl. (5.103) ergeben sich nun

- Minimale Energie:

$$f_{0,1} = \|\mathbf{x}_4(s)\|_2, \quad (5.112)$$

- Minimale Leistung:

$$f_{0,2} = \|\mathbf{x}_4^\top(s) \cdot \dot{\mathbf{l}}(\mathbf{x}_1(s), \mathbf{x}_2(s))\|_2, \quad (5.113)$$

- Minimaler Ruck:

$$f_{0,3} = \|\mathbf{u}_1(s)\|_2, \quad (5.114)$$

- Minimale Kraftänderung:

$$f_{0,4} = \|\mathbf{u}_2(s)\|_2. \quad (5.115)$$

Es ist durchaus möglich, aus einer gewichteten Linearkombination der einzelnen Kriterien eine Gesamt-Zielfunktion zu bilden. In der BOLZA-Form, vgl. Gl. (5.82), ergibt sich

$$\min_{\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), t_f} \alpha_0 \varphi(\mathbf{x}(1), t_f) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_0^1 t_f \cdot f_{0,i}(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)) \, ds, \quad (5.116)$$

wobei  $\alpha_i$ ,  $0 \leq i \leq m$  entsprechende skalare Gewichtungsfaktoren sind. In der MAYER-Form wird die Zielfunktion in Gl. (5.86a) durch

$$\min_{\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), t_f, F_0} \mathcal{Z}(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), t_f, F_0) = \alpha_0 \varphi(\mathbf{x}(1)) + F_0(1) \quad (5.117)$$

und Gl. (5.86c) durch

$$\dot{F}_0(s) = f_0(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot f_{0,i}(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)) \quad (5.118)$$

ersetzt.

Das diskretisierte optimale Steuerungsproblem lautet gemäß Gl. (5.94) nun

$$\min_{\mathbf{y}} \mathcal{Z}(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}(1)) + F_0(1) \quad (5.119a)$$

$$\text{u. d. N. } \mathbf{r}_d = \mathbf{f}_d(\mathbf{x}_{i,M}, \mathbf{u}_{i,M}) - \dot{\mathbf{x}}_{i,M} = \mathbf{0}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (5.119b)$$

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{f}_a(\mathbf{x}_{i,M}, \mathbf{u}_{i,M}) = \mathbf{0}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (5.119c)$$

$$r_0 = f_0(\mathbf{x}_{i,M}, \mathbf{u}_{i,M}) - \dot{F}_{0,i,M} = 0, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (5.119d)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (5.119e)$$

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_f, \quad (5.119f)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \leq \mathbf{0}, \quad 0 \leq i \leq N. \quad (5.119g)$$



### 5.5.5 Simulationsergebnisse

Die in diesem Abschnitt bestimmten optimalen Trajektorien werden einer Referenz-Trajektorie gegenübergestellt (vgl. Lalo u. a. 2013). Diese Referenz-Trajektorie wird aus der einfachen Methode der Trajektoriengenerierung nach Abschnitt 5.5.1 gebildet, deren Bahn eine gerade Strecke darstellt, diagonal vom linken unteren Fach  $A$  zum rechten oberen Fach  $B$  des Regals, vgl. dazu Abb. 5.23.

Bereits in Abschnitt 5.5.3 wurde erwähnt, dass das optimale Steuerungsproblem durch direkte Kollokation in ein nichtlineares Optimierungsproblem gemäß Gl. (5.94) überführt und mit entsprechenden numerischen Algorithmen gelöst werden kann. Die bewährten SQP-basierten numerischen Verfahren erfordern dabei die JACOBI- und HESSE-Matrix der Zielfunktion und der Nebenbedingungen, welche mittels finite Differenzen und BFGS-Verfahren (Nocedal und Wright 2006) approximiert werden können. Unter Umständen mag es, besonders bei großen, dünn besetzten Problemen sinnvoll sein, den Gradienten analytisch vorzugeben, um die Effizienz des Lösungsverfahrens zu verbessern. Der Gradient des nichtlinearen Problems nach Gl. (5.119) ist in Abb. 5.32 für  $N = 10$  Intervalle beispielhaft angegeben, wobei die von Null verschiedenen Matrixelemente dunkel (blau) markiert sind. Die Anzahl der von Null verschiedenen Elemente beträgt hierbei  $n_z = 4172$  und macht bei der  $244 \times 276$  großen Matrix einen Anteil von etwa 6.2 % aus.

Die Simulationsergebnisse sowohl für die Referenz- als auch optimale Trajektorie basieren auf den Parametern gemäß Tab. 5.4. Die Zielfunktion ist hierbei eine Line-

Tabelle 5.4: Parameter des Regalbediengeräts

Techn. Einschränkung	Wert
maximale Geschwindigkeit der Plattform [m/s]	6
maximale Beschleunigung der Plattform [m/s <sup>2</sup> ]	5
maximaler Ruck der Plattform [m/s <sup>3</sup> ]	30
minimale Seilkraft [N]	100
maximale Seilkraft [N]	5000

arkombination aus Zeit und Leistung, die mit den Gewichtungsfaktoren  $\alpha_{t_f} = 10^3$  und  $\alpha_P = 10^{-5}$  minimiert werden sollen.

In Abb. 5.33 wird die PTP-Trajektorie vom linken, unteren zum rechten, oberen Regalfach dargestellt. Dabei zeigt die gestrichelte Bahn die Referenz-Trajektorie und die durchgezogene Bahn die optimale Trajektorie. Es ist die deutlich geschwungene Form der optimalen Trajektorie zu erkennen. Während die Plattform für die

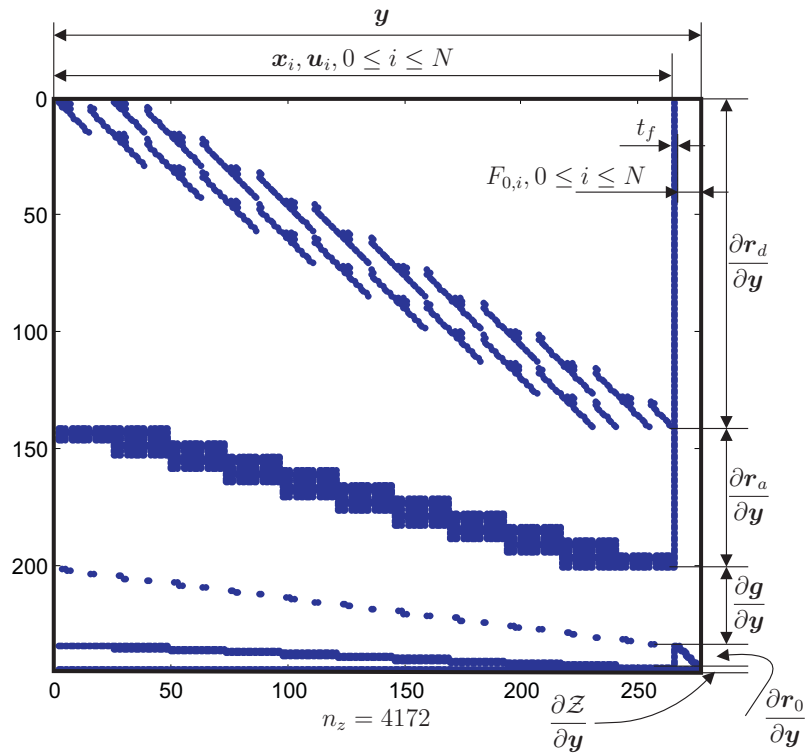


Abbildung 5.32: Dünns besetzter Gradient des diskretisierten optimalen Steuerungsproblems für  $N = 10$  Zeitintervalle. Die von Null verschiedenen Matrixeinträge sind dunkel (blau) markiert.

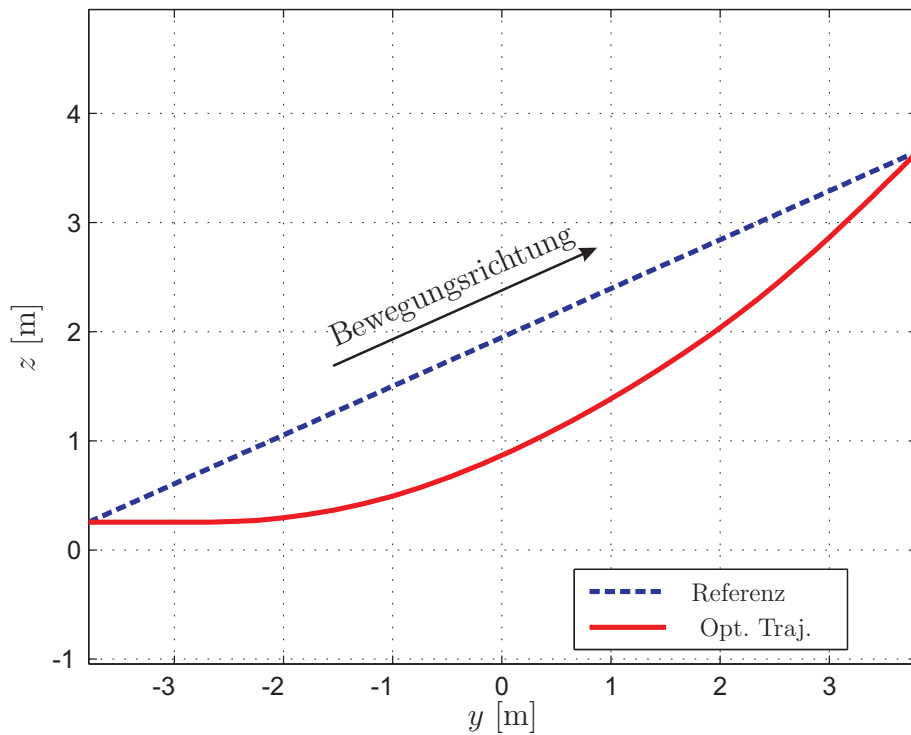


Abbildung 5.33:  $yz$ -Trajektorie.

Referenz-Trajektorie etwa 2.75 s benötigt, beträgt sie bei der optimalen Trajektorie ca. 2.798 s und ist damit ungefähr 4.71 % langsamer als die Referenz. Jedoch kann die Spitzenleistung der einzelnen Motoren reduziert werden (z. B. Abb. 5.34). Beispielsweise benötigt der zweite Motor eine Spitzenleistung von etwa 6.73 kW für

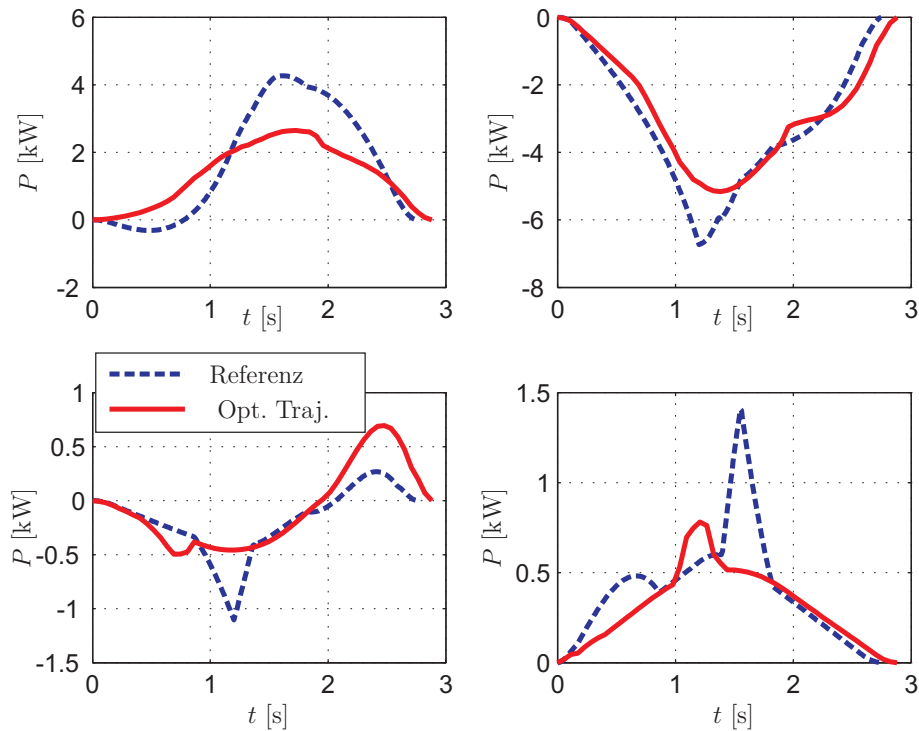


Abbildung 5.34: Leistungsverbrauch der einzelnen Motoren.

die Referenz, während für die optimale Trajektorie lediglich 5.16 kW erforderlich sind. Dies macht eine Leistungsreduzierung von etwa 23.26 % aus, so dass praktisch kleinere Motoren verwendet werden können. Entsprechend ergibt sich gemäß Abb. 5.35a eine Reduzierung der gesamten Spitzenleistung um ca. 21.91 %. Die Gesamtenergie, die benötigt wird, um die optimale Trajektorie zu fahren reduziert sich entsprechend um 11.73 %, Abb. 5.35b.

Die folgenden Simulationsergebnisse zeigen eine horizontale Trajektorie zwischen dem linken und rechten oberen Regalfach (Abb. 5.36 und Abb. 5.37). Die durchgezogenen Linien stellen die entsprechende optimale Trajektorie und deren Leistungs- und Energieverbrauch für die selben, oben verwendeten Gewichtungsfaktoren. Bezüglich dieser Trajektorie ergibt sich eine verlängerte Zeit gegenüber der Referenz um 28.46 %, jedoch werden 66.77 % an Spitzenleistung und 43.72 % an Energie gespart. Da die für die optimale Trajektorie benötigte Zeit unter Umständen zu groß ist, kann die Wichtung der zu minimierenden Zeit erhöht werden. Entsprechende Optimierungsergebnisse werden durch die strich-punktierten Graphen dargestellt.

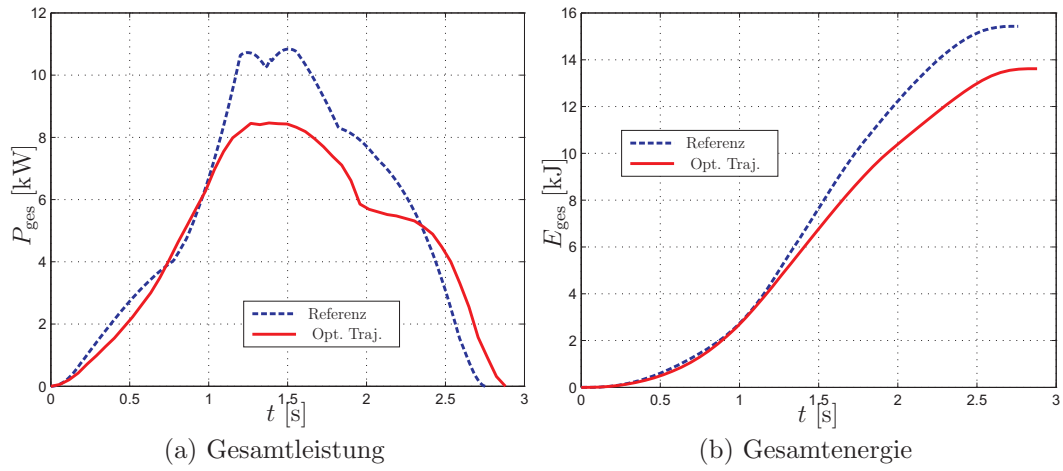
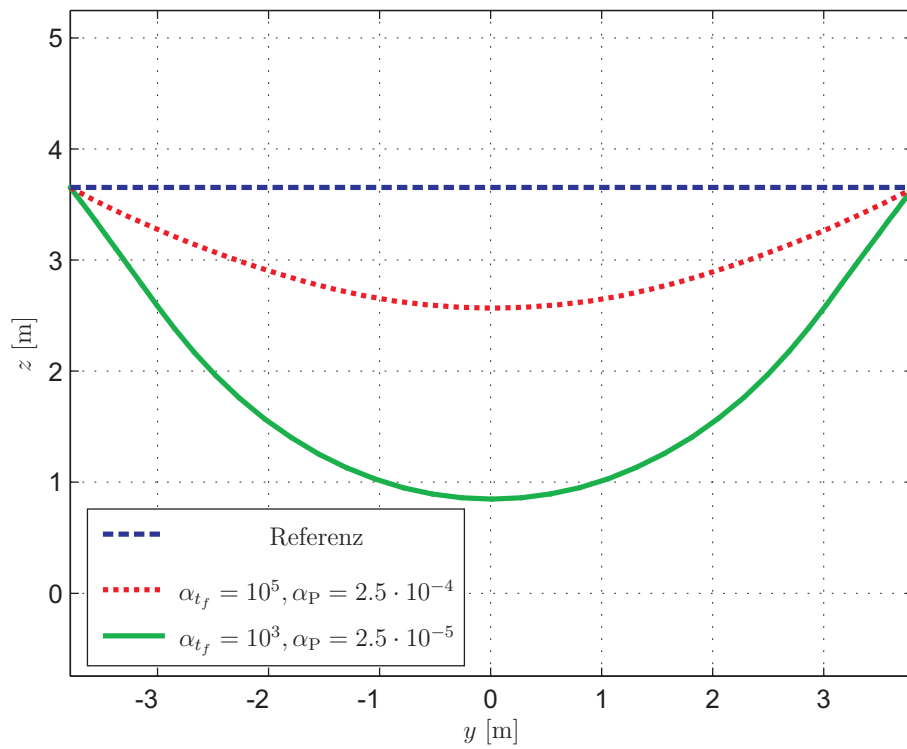


Abbildung 5.35: Gesamtleistung und -energieverbrauch der PTP-Trajektorie.

Abbildung 5.36:  $yz$ -Trajektorie

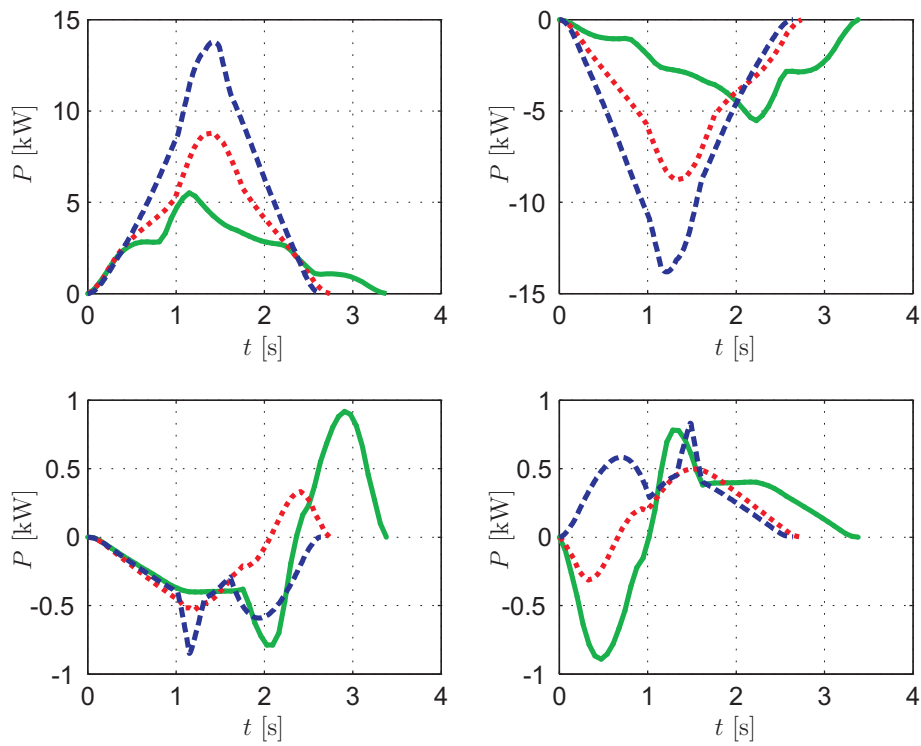


Abbildung 5.37: Leistung je Motor. Legende siehe Abb. 5.36.

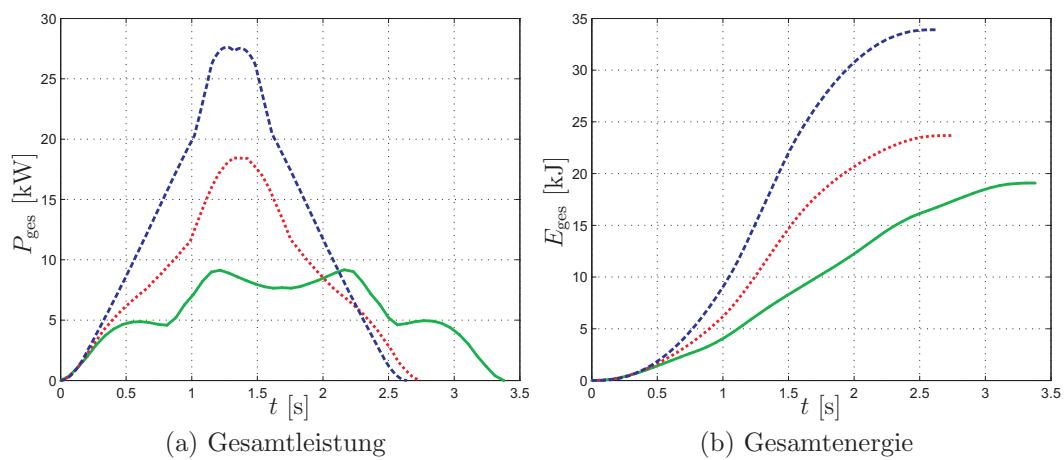


Abbildung 5.38: Gesamtleistung und -energieverbrauch der PTP-Trajektorie. Legende siehe Abb. 5.36.

Mit den angepassten Wichtungsfaktoren ergibt sich ein Zeitverlust von etwa 4.19 %, während die Spitzenleistung und Gesamtenergie um 33.22 % bzw. 30.17 % reduziert werden.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf der Entwicklung eines neuen Algorithmus zur Lösung konvexer quadratischer Programme mit einfachen Quader-Ungleichungs-Nebenbedingungen. Mit dem Algorithmus ist es möglich, grundlegende Fragestellungen serieller und paralleler Roboter zu lösen, die für deren Automatisierung von elementarer Bedeutung sind, sei es als vollautomatisiertes System oder Teil eines Assistenzsystems. Der duale Zusammenhang zwischen seriellen und parallelen Robotern bildet dabei die Grundlage für die Wiederverwendbarkeit des Algorithmus, womit konkret die inverse Kinematik serieller redundanter Manipulatoren und die Seilkraftverteilung paralleler, redundanter Roboter gelöst werden kann.

Als Beispiel eines vollautomatisierten Systems dient ein Regalbediengerät, welches als ein paralleler Seilroboter auf Basis der STEWART-GOUGH-Plattform konzipiert ist. Aufgrund der Vorteile eines Seilroboters reduziert sich der Energieverbrauch im Vergleich zu den konventionellen Regalbediengeräten, da weniger bewegte Masse zu beschleunigen ist, so dass im Gegenzug schnellere Bewegungen erlaubt werden können. Damit kann die Zykluszeit beim Ein- und Auslagern der Waren reduziert werden.

Mit Hilfe des Algorithmus wird offline eine statische Arbeitsraumoptimierung durchgeführt, wobei die Basispunkte des Seilroboters so lange „verschoben“ werden bis ein größtmöglicher Arbeitsraum entsteht, der das gesamte Regal abdeckt und die statischen Seilkraftverteilungen im gesamten Arbeitsraum minimal werden. Für die Online- bzw. Echtzeitanwendung wird der Algorithmus zur Berechnung der dynamischen Seilkraftverteilung benutzt, so dass ein modellbasiertes Regelungsverfahren zum Einsatz kommen kann, mit dem die Positioniergenauigkeit der Plattform verbessert werden kann. Ein Potential zur Effizienzsteigerung liefert die Methode der optimalen Steuerung, die offline eine modellbasierte, zeit-, energie- und leistungsoptimale Bahn- und Trajektorienplanung generiert.

Während der Ein- und Auslagerungsprozess beim Regalbediengerät vollautomatisiert geschehen kann, ist die Automatisierung für eine Autobetonpumpe als ein seriell redundantes Beispiel begrenzt, da im ihrem Arbeitsraum statische und bewegte Hindernisse vorkommen, die mit aufwändiger Umweltsensorik erfasst werden müssen. Aus diesem Grund wird eine Autobetonpumpe teilautomatisch als ein Assistenzsystem konzipiert, welches eine intuitive Bewegungssteuerung des Endeffektors ermöglicht, um den Bediener zu unterstützen.

Grundlegend dafür ist die Berechnung der inversen Kinematik des seriellen, redundanten Manipulators, welches mit dem Algorithmus realisiert werden kann. Der skalare Manipulierbarkeitsindikator nach Schlemmer (2000) und Abdel-Rahman (1991) unterstützt den Bediener dabei, singuläre Stellungen des Endeffektors zu erfassen und führt die Bewegungen in der Nähe der singulären Stellungen numerisch stabil aus.

Der auf der Active-Set-Methode basierende Algorithmus hat im Worst-Case theoretisch eine exponentielle Laufzeit, wobei die praktischen Ergebnisse gezeigt haben, dass weit weniger Iterationen benötigt werden und daher diese Verfahren für die vorliegenden Systeme prinzipiell echtzeitfähig sind. Ein interessanter Ansatz wäre die Anwendung eines Innere-Punkte-Verfahrens für quadratische Programme, da diese theoretisch polynomiales Laufzeitverhalten haben, so dass ein Vergleich der Effektivität zwischen der Active-Set- und Innere-Punkte-Methode durchgeführt werden kann.



## Literaturverzeichnis

- Abdel-Rahman, T. M. (1991). A generalized practical method for analytic solution of the constrained inverse kinematics problem of redundant manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, Bd. 10, Nr. 4: S. 382–395. <http://ijr.sagepub.com/content/10/4/382.abstract>.
- Alevras, D. und Padberg, M. W. (2001). *Linear Optimization and Extensions*. Springer, Berlin; Heidelberg.
- Asada, H. und Slotine, J. (1986). *Robot analysis and control*. A Wiley-interscience publication. J. Wiley. <http://books.google.de/books?id=KUG1VGkL3loC>.
- Avis, D. und Devroye, L. (2000). Estimating the number of vertices of a polyhedron. *Inf. Process. Lett.*, S. 137–143.
- Bartlett, R. und Biegler, L. (2006). QPSchur: A dual, active-set, Schur-complement method for large-scale and structured convex quadratic programming. *Optimization and Engineering*, Bd. 7, Nr. 1: S. 5–32. <http://dx.doi.org/10.1007/s11081-006-6588-z>.
- Baxter, B. (2000). Fast numerical methods for inverse kinematics. February 21, COMP 290-72, Physically Based Modeling. <http://billbaxter.com/courses/290/html/index.htm>.
- Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J. und Sherali, H. D. (2004). *Linear Programming and Network Flows*. Wiley, 3. Ausgabe.
- Boggs, P. T. (1996). An interior point method for general large-scale quadratic programming problems. *Annals of Operations Research*, Bd. 1, Nr. 1: S. 287–437.
- Boland, N. (1996). A dual-active-set algorithm for positive semi-definite quadratic programming. *Mathematical Programming*, Bd. 78: S. 1–27. 10.1007/BF02614503. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02614503>.
- Borgstrom, P., Jordan, B., Sukhatme, G., Batalin, M. und Kaiser, W. (2009). Rapid computation of optimally safe tension distributions for parallel cable-driven robots. *IEEE Transactions on Robotics*, Bd. 25, Nr. 6: S. 1271–1281.
- Breun, S. (2007). *Optimale Steuerung redundanter Roboter auf Mannigfaltigkeiten - Strukturanalyse und numerische Realisierung*. Dissertation, Technische Universität München.

- Bruckmann, T. (2010). *Auslegung und Betrieb redundanter paralleler Seilroboter*. Dissertation, Universität Duisburg-Essen. <http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DocumentServlet?id=23303>.
- Bruckmann, T., Lalo, W., Nguyen, K. und Salah, B. (2012). Development of a storage retrieval machine for high racks using a wire robot. In *Proceedings of the ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, IDETC/CIE 2012*, Chicago, IL, USA.
- Bruckmann, T., Lalo, W. und Sturm, C. (2013). Application examples of wire robots. In Gattringer, H. und Gerstmayr, J. (Hrsg.), *Multibody System Dynamics, Robotics and Control*, Vienna, Austria. Springer Verlag.
- Bruckmann, T., Mikelsons, L., Brandt, T., Hiller, M. und Schramm, D. (2008a). Wire robots part I - kinematics, analysis & design. In Lazinica, A. (Hrsg.), *Parallel Manipulators - New Developments*, ARS Robotic Books, S. 109–132. I-Tech Education and Publishing, Vienna, Austria. ISBN 978-3-902613-20-2.
- Bruckmann, T., Mikelsons, L., Brandt, T., Hiller, M. und Schramm, D. (2008b). Wire robots part II - dynamics, control & application. In Lazinica, A. (Hrsg.), *Parallel Manipulators - New Developments*, ARS Robotic Books, S. 133–153. I-Tech Education and Publishing, Vienna, Austria. ISBN 978-3-902613-20-2.
- Bruckmann, T., Mikelsons, L., Brandt, T., Hiller, M. und Schramm, D. (2009). Design approaches for wire robots. In *Proceedings of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*, San Diego, CA, USA. ASME International.
- Bruckmann, T., Sturm, C. und Lalo, W. (2011). Wire robot suspension systems for wind tunnels. *Wind Tunnels and Experimental Fluid Dynamics Research*, S. 137–143. <http://www.intechopen.com/articles/show/title/wire-robot-suspension-systems-for-wind-tunnels>.
- Büskens, C. (1993). Direkte Optimierungsmethoden zur numerischen Berechnung Optimaler Steuerungen. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster.
- Bulirsch, R. (1971). *Die Mehrzielmethode zur numerischen Lösung von nichtlinearen Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung*. Teil 2 von Einführung in die Flugbahnoptimierung. Carl-Cranz-Ges., Köln.

- Buschmann, A. (1999). *Komponenten der globalen Bahnplanung für Schwerlast-handhabungssysteme*. Dissertation, Gerhard-Mercator Universität, Duisburg. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 785, Düsseldorf.
- Buss, S. R. (2004). Introduction to inverse kinematics with jacobian transpose, pseudoinverse and damped least squares methods. Technical Report.
- Buss, S. R. und Kim, J.-S. (2005). Selectively damped least squares for inverse kinematics. *Journal of Graphics Tools*, Bd. 10, Nr. 3: S. 37–49.
- Cheng, F.-T., Chen, T.-H. und Sun, Y.-Y. (1992). Efficient algorithm for resolving manipulator redundancy-the compact qp method. In *1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Bd. 1, S. 508–513.
- Cheng, F.-T., Chen, T.-H., Wang, Y.-S. und Sun, Y.-Y. (1993). Obstacle avoidance for redundant manipulators using the compact qp method. In *1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Bd. 3, S. 262–269.
- Cheng, F.-T., Sheu, R.-J., Chen, T.-H. und Kung, F.-C. (1994). The improved compact qp method for resolving manipulator redundancy. In *IROS '94. Proceedings of the IEEE/RSJ/GI International Conference on Intelligent Robots and Systems '94. 'Advanced Robotic Systems and the Real World'*, Bd. 2, S. 1368–1375.
- Chiacchio, P. und Siciliano, B. (1989). A closed-loop jacobian transpose scheme for solving the inverse kinematics of nonredundant and redundant wrists. *Journal of Robotic Systems*, Bd. 6, Nr. 5: S. 601–630. <http://dx.doi.org/10.1002/rob.4620060507>.
- Conkur, E. S. und Buckingham, R. (1997). Clarifying the definition of redundancy as used in robotics. *Robotica*, Bd. 15: S. 583–586. <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=982122.982134>.
- Dantzig, G. B. (1966). *Lineare Programmierung und Erweiterungen*. Ökonometrie und Unternehmensforschung II. Springer, Berlin [u.a.].
- Das, H., Slotine, J.-E. und Sheridan, T. (1988). Inverse kinematic algorithms for redundant systems. In *1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Bd. 1, S. 43–48.
- de Wit, C. C., Siciliano, B. und Bastin, G. (1996). *Theory of Robot Control*. Communications and control engineering. Springer, London. <http://books.google.de/books?id=PU1SAAAAMAAJ>.

- Denavit, J. und Hartenberg, R. S. (1955). A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, Bd. 22: S. 215–221. <http://ci.nii.ac.jp/naid/10008019314/en/>.
- Deo, A. und Walker, I. (1995). Overview of damped least-squares methods for inverse kinematics of robot manipulators. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Bd. 14, Nr. 1: S. 43–68. [springerlink:10.1007/BF01254007](http://dx.doi.org/10.1007/BF01254007). <http://dx.doi.org/10.1007/BF01254007>.
- Deutsches Institut für Normung e. V. (DIN) (2006). Internationales Elektronisches Wörterbuch – Teil 351: Leittechnik.
- Dickmanns, E. D. und Well, K. H. (1974). Approximate solution of optimal control problems using third order hermite polynomial functions. In *Optimization Techniques '74*, S. 158–166.
- Domschke, W. und Drexl, A. (1998). *Einführung in Operations Research*. Springer, 4. Ausgabe.
- Ebert-Uphoff, I. und Voglewede, P. (2004). On the connections between cable-driven robots, parallel manipulators and grasping. In *ICRA '04. 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Bd. 5, S. 4521–4526.
- Engeln, W. (1995). *Rechnergestützte Auslegungsverfahren für Großmanipulatoren mit Gelenkarmkinematik*. Dissertation, IPA-IAO Forschung und Praxis, Stuttgart. Springer, Berlin; Heidelberg.
- Fang, S. (2005). *Design, Modeling and Motion Control of Tendon-based Parallel Manipulators*. Dissertation, Gerhard-Mercator-University, Duisburg. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 1076, Duesseldorf.
- Fattah, A. und Agrawal, S. K. (2005). On the design of cable-suspended planar parallel robots. *ASME J. of Mechanical Design*, Bd. 127, Nr. 5: S. 1021–1028.
- Fritzson, P. (2004). *Principles of Object-Oriented Modeling and Simulation With Modelica 2.1*. IEEE Press. <http://books.google.de/books?id=IzqY8Abz1rAC>.
- Geiger, B. R., Horn, J. F., DeLullo, A. M. und Long, L. N. (2006). Optimal path planning of uavs using direct collocation with nonlinaer programming. *AIAA GNC Conference*.
- Gill, P., Murray, W. und Wright, M. (1991). *Numerical linear algebra and optimization*, Bd. 1 von *Numerical Linear Algebra and Optimization*. Addison-

- Wesley Pub. Co., Advanced Book Program. <http://books.google.de/books?id=ng3vAAAAMAAJ>.
- Gill, P. E., Murray, W., Michael und Saunders, M. A. (1997). Snopt: An sqp algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, Bd. 12: S. 979–1006.
- Gill, P. E., Murray, W. und Wright, M. H. (1981). *Practical optimization*. Academic Press, London; New York.
- Gill, P. E. und Wong, E. (2010). Methods for convex and general quadratic programming. Technical report, Department of Mathematics, University of California, San Diego, La Jolla, CA. Numerical Analysis Report 10-1.
- Goldfarb, D. und Idnani, A. (1983). A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs. *Math. Programming*, Bd. 27: S. 1–33.
- Gosselin, F. und Lallemant, J.-P. (2001). A new insight into the duality between serial and parallel non-redundant and redundant manipulators. *Robotica*, Bd. 19, Nr. 4: S. 365–370. <http://dx.doi.org/10.1017/S0263574701003332>.
- Gouttefarde, M., Krut, S., Company, O., Pierrot, F. und Ramdani, N. (2008). On the design of fully constrained parallel cable-driven robots. In Lenarčič, J. und Wenger, P. (Hrsg.), *Advances in Robot Kinematics (ARK)*, S. 71–78, Netherlands. Springer.
- Gretschko, V. (2007). Theorie und Numerik optimaler Steuerprozesse mit Retardierung und Steuer- und Zustandsbeschränkung. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster.
- Griva, I., Nash, S. und Sofer, A. (2009). *Linear and nonlinear optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics. <http://books.google.de/books?id=u0J-Vg1BnKgC>.
- Hargraves, C. R. und Paris, S. W. (1987). Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Bd. 10, Nr. 4: S. 338–342.
- Hassan, M. und Khajepour, A. (2009). Analysis of a large-workspace cable-actuated manipulator for warehousing applications. In *Proceedings of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*, San Diego, CA, USA. ASME International.

- Hay, A. und Snyman, J. (2005). Optimization of a planar tendon-driven parallel manipulator for a maximal dextrous workspace. *Engineering Optimization*, Bd. 37, Nr. 3: S. 217–236.
- Hiller, M. (1995). Multi-loop kinematic chains, dynamics of multi-loop systems. *Kinematics and Dynamics of Multi-Body Systems in CISM Lectures and Courses*, S. 75–165.
- Hiller, M. (1997). Computergestützte Methoden und Verfahren. Universität Duisburg-Essen, Lehrstuhl für Mechatronik, Vorlesungsskript.
- Hiller, M., Brandt, T., Bruckmann, T. und Lalo, W. (2009). Simulators and demonstrators - efficient tools in the development process of mechatronic systems. *Proceedings of the ISRM 2009, 1. IFToMM International Symposium on Robotics and Mechatronics*.
- Hiller, M., Kecskeméthy, A. und Woernle, C. (1986). A loop-based kinematical analysis of complex mechanisms. *Design Engineering Technical Conference, The American Society of Mechanical Engineers, ASME*.
- Hiller, M. und Woernle, C. (1988). The characteristic pair of joints - an effective approach for the inverse kinematic problem of robots. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 846–851.
- Ho, E., Komura, T. und Lau, R. (2005). Computing inverse kinematics with linear programming. *VRST 2005: Proceedings of the ACM Symposium on Virtual Reality Software and Technology, Monterey, USA*, S. 163–166.
- Husty, M., Mielczarek, S. und Hiller, M. (2002). A redundant spatial stewart-gough platform with a maximal forward kinematics solution set. In Lenarčič, J. und Thomas, F. (Hrsg.), *Advances in Robot Kinematics*, S. 147–154. Springer Netherlands. [http://dx.doi.org/10.1007/978-94-017-0657-5\\_16](http://dx.doi.org/10.1007/978-94-017-0657-5_16).
- Khatib, O. (1985). Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. *1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Bd. 2: S. 500 – 505.
- Kleutges, M. (1999). *Modellierung elastischer Handhabungssysteme in der globalen Bahnplanung*. Dissertation, Gerhard Mercator Universität, Duisburg. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 768, Düsseldorf.
- Kock, S. (2001). *Parallelroboter mit Antriebsredundanz*. VDI. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Mess-, Steuerungs- und Regelungstechnik, Nr. 890, Düsseldorf.



- Komainda, A. (2003). *Methoden und Verfahren zur Online-Bahnplanung redundanter Schwerlastmanipulatoren*. Dissertation, Gerhard-Mercator-University, Duisburg. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 993, Düsseldorf.
- Komainda, A. und Hiller, M. (1999a). Control of heavy load manipulators in varying environments. *Proceedings of the 16th IAARC/IFAC/IEEE International Symposium on Automation and Robotics in Construction*, S. 301–306.
- Komainda, A. und Hiller, M. (1999b). Motion control of redundant large-scale manipulators in a changing environment. In *Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, S. 1033–1038.
- Lalo, W., Bruckmann, T. und Schramm, D. (2013). Optimal control for a wire-based storage retrieval machine. In Viadero, F. und Ceccarelli, M. (Hrsg.), *New Trends in Mechanism and Machine Science, Mechanisms and Machine Science* 7, Dordrecht. Springer Science+Business Media Dordrecht. DOI 10.1007/978-94-007-4902-3 66.
- Lang, H.-P. (1997). *Kinematik-Kennfelder in der objektorientierten Mehrkörpermodellierung von Fahrzeugen mit Gelenkelastizitäten*. Dissertation, Universität-Gesamthochschule Duisburg. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 12, Nr. 323, Düsseldorf.
- Lemke, C. E. (1962). A method of solution for quadratic programs. *Management Science*, Bd. 8, Nr. 4: S. 442–453. <http://www.jstor.org/stable/2627246>.
- Luenberger, D. G. und Ye, Y. (2008). *Linear and Nonlinear Programming*. Springer Verlag, New York, 3. Ausgabe.
- McMullen, P. (1970). The maximum numbers of faces of a convex polytope. *Mathematika*, Bd. 17: S. 179–184. [http://journals.cambridge.org/article\\_S0025579300002850](http://journals.cambridge.org/article_S0025579300002850).
- McMullen, P. und Shephard, G. (1971). *Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture*. London Math. Soc: Lecture note series. Cambridge University Press. <http://books.google.de/books?id=ET04AAAAIAAJ>.
- Merlet, J.-P. (1994). Trajectory verification in the workspace for parallel manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, Bd. 13, Nr. 4: S. 326–333.
- Merlet, J. P. (2004). Solving the forward kinematics of a gough-type parallel manipulator with interval analysis. *The International Journal of Robotics Research*, Bd. 23, Nr. 3: S. 221–235. <http://ijr.sagepub.com/content/23/3/221.abstract>.

- Merlet, J.-P. (2006). *Parallel Robots*. Springer, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands.
- Merlet, J.-P. (2008). Kinematics of the wire-driven parallel robot marionet using linear actuators. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 3857–3862, Pasadena, California, USA.
- Mikelsons, L., Bruckmann, T., Hiller, M. und Schramm, D. (2008). A real-time capable force calculation algorithm for redundant tendon-based parallel manipulators. *IEEE International Conference on Robotics and Automation 2008*.
- Ming, A. und Higuchi, T. (1994). Study on multiple degree of freedom positioning mechanisms using wires, part 1 - concept, design and control. *International Journal of the Japan Society for Precision Engineering*, Bd. 28: S. 131–138.
- Murty, K. G. (2006). A new practically efficient interior point method for quadratic programming. *Algorithmic Operations Research*, S. 1–11. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.74.8249&rep=rep1&type=pdf>.
- Nahon, M. und Angeles, J. (1992). Real-time force optimization in parallel kinematic chains under inequality constraints. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Bd. 8, Nr. 4: S. 439–450.
- Nakamura, Y. und H., H. (1986). Inverse Kinematic Solution with Singularity Robustness for Robot Manipulator Control. *Journal of Dynamical Systems, Measurement and Control*, S. 163–177.
- Nissing, D. (2002). *Identifikation, Regelung und Beobachterauslegung für elastische Großhandhabungssysteme*. Dissertation, Gerhard Mercator Universität, Duisburg. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 939, Düsseldorf.
- Nocedal, J. und Wright, S. J. (1999). *Numerical Optimization*. Springer, New York.
- Nocedal, J. und Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization – Second Edition*. Springer, New York, 2. Ausgabe.
- Numerical Algorithms Group (2010). Nag toolbox for matlab – e04uc. [http://www.nag.co.uk/numeric/MB/manual\\_21\\_1/pdf/E04/e04uc.pdf](http://www.nag.co.uk/numeric/MB/manual_21_1/pdf/E04/e04uc.pdf).
- Oberle, H. und Grimm, W. (2001). *BNDSCO: a program for the numerical solution of optimal control problems*. Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik: Reihe B, Berichte. Inst. für Angewandte Mathematik. <http://books.google.de/books?id=ovZTewAACAAJ>.



- Oh, S. R. und Agrawal, S. K. (2005). Cable suspended planar robots with redundant cables: Controllers with positive tensions. In *IEEE Transactions on Robotics*, S. 457–465.
- Palm, W. (2004). *Introduction to Matlab 7 for Engineers*. McGraw-Hill's BEST Series. McGraw-Hill. <http://books.google.de/books?id=iFmg5rlm0SkC>.
- Pechev, A. (2008). Inverse kinematics without matrix inversion. In *ICRA 2008. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 2005–2012.
- Peressini, A. L., Sullivan, F. E. und Uhl, Jr., J. J. (1988). *The Mathematics of Nonlinear Programming*. Springer, New York.
- Pontryagin, L. und Gamkrelidze, R. (1986). *The mathematical theory of optimal processes*. Classics of Soviet mathematics. Gordon and Breach Science Publishers. <http://books.google.de/books?id=k wzq0F4cBVAC>.
- Pott, A. (2007). *Analyse und Synthese von Parallelkinematik-Werkzeugmaschinen*. Dissertation, Gerhard-Mercator-University, Duisburg. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 20, Nr. 409, Düsseldorf. <http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DocumentServlet?id=16150>.
- Pott, A., Bruckmann, T. und Mikelsons, L. (2009). Closed-form force distribution for parallel wire robots. In Kecskeméthy, A. und Müller, A. (Hrsg.), *Computational Kinematics*, S. 25–34. Springer, Berlin; Heidelberg. [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-01947-0\\_4](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-01947-0_4).
- Pott, A. und Hiller, M. (2006a). A framework for the analysis, synthesis and optimization of parallel kinematic machines. In Lenarčič, J. und Roth, B. (Hrsg.), *Advances in Robot Kinematics – Mechanisms and Motion*, S. 103–112, Dordrecht, The Netherlands. Springer.
- Pott, A. und Hiller, M. (2006b). A parallel implementation for the optimization of parallel kinematic machines under process requirements. In Husty, M. und Schroeder, H.-P. (Hrsg.), *1st European Conference on Mechanism Science*, Obergurgl, Austria. ISBN 3-901249-85-0.
- Powell, M. J. D. (1985). On the quadratic programming algorithm of Goldfarb and Idnani. In Cottle, R. W. (Hrsg.), *Mathematical Programming Essays in Honor of George B. Dantzig Part II*, Bd. 25 von *Mathematical Programming Studies*, S. 46–61. Springer, Berlin; Heidelberg. [10.1007/BFb0121074](http://dx.doi.org/10.1007/BFb0121074). <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0121074>.

- Riede, P. (2006). *Optimierung von dynamischen Multiple-Setpoint-Problemen mit Anwendung bei Fahrzeugmodellen*. Dissertation, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg.
- Riege, B. (2001). *Zur Modellbildung, Strukturuntersuchung und Regelung elastischer Handhabungssysteme*. Dissertation, Universität Duisburg. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 881, Düsseldorf.
- Riemenschneider, T. (2011). *Optimale Steuerung einer Laufkatze im Hochregallager*. Diplomarbeit, Zentrum für Technomathematik – Universität Bremen.
- Schäfer, U. (2008). *Das lineare Komplementaritätsproblem: Eine Einführung*. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin. <http://books.google.de/books?id=5fUxtS7wKGwC>.
- Schlemmer, M. (2000). *Eine SQP-Rückwärtskinematik zur interaktiven, semi-autonomen Bahnführung kinematisch redundanter Manipulatoren*. Dissertation, Institut für Robotik und Systemdynamik, DLR, Oberpfaffenhofen. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 825, Düsseldorf.
- Schneider, M. (1999). *Modellbildung, Simulation und nichtlineare Regelung elastischer, hydraulisch angetriebener Großmanipulatoren*. Dissertation, Gerhard-Mercator-University, Duisburg. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 756, Düsseldorf.
- Schneider, M. und Hiller, M. (1995a). Modelling, simulation and control of a large hydraulically driven redundant manipulator with flexible links. In *Proceedings of the 9th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms (IFTToMM)*, S. 3038–3043. Politecnico di Milano.
- Schneider, M. und Hiller, M. (1995b). Nonlinear motion control of hydraulically driven large redundant manipulators. In *Proceedings of the IFAC-Workshop Motion Control*, S. 269–278.
- Schramm, D., Hiller, M. und Bardini, R. (2010a). *Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen*. Springer, Berlin; Heidelberg.
- Schramm, D., Lalo, W. und Unterreiner, M. (2010b). Application of simulators and simulation tools for the functional design of mechatronic systems. *Solid State Phenomena*, Bd. 166–167, Nr. 1: S. 1–14.
- Schreiber, G. (2004). *Steuerung für redundante Robotersysteme: Benutzer- und aufgabenorientierte Verwendung der Redundanz*. Dissertation, DLR Institut für Ro-

- botik und Mechatronik. <http://elib.uni-stuttgart.de/opus/volltexte/2005/2186/>.
- Spong, M., Hutchinson, S. und Vidyasagar, M. (2006). *Robot modeling and control*. John Wiley & Sons. <http://books.google.de/books?id=wGapQAAACAAJ>.
- Sturm, C. und Schramm, D. (2010). On the control of tendon based parallel manipulators. *Solid State Phenomena - Robotics and Automation Systems*, Bd. 166-167: S. 395–402.
- Taghirad, H. und Nahon, M. (2007). Forward kinematics of a macro-micro parallel manipulator. In *2007 IEEE/ASME international conference on advanced intelligent mechatronics*, S. 1–6.
- The Mathworks. MATLAB optimization toolbox user's guide. [http://www.mathworks.co.uk/access/helpdesk/help/pdf\\_doc/optim/optim\\_tb.pdf](http://www.mathworks.co.uk/access/helpdesk/help/pdf_doc/optim/optim_tb.pdf).
- The Mathworks. MATLAB user's guide. [http://www.mathworks.de/access/helpdesk/help/pdf\\_doc/matlab/getstart.pdf](http://www.mathworks.de/access/helpdesk/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf).
- Tiller, M. (2001). *Introduction to physical modeling with Modelica*. Kluwer international series in engineering and computer science. Kluwer Academic Publishers. <http://books.google.de/books?id=BbJRLKoTfwWC>.
- Verein Deutscher Ingenieure (VDI) (2004). Entwicklungsmethodik für mechatronische Systeme. VDI-Guideline VDI 2206.
- Verhoeven, R. (2004). *Analysis of the Workspace of Tendon-based Stewart Platforms*. Dissertation, University of Duisburg-Essen. <http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/go/duett-09112004-165148?lang=en>.
- Verhoeven, R. und Hiller, M. (2002). Tension distribution in tendon-based Stewart platforms. *Proceedings of the ARK '02, 8th. International Symposium on Advances in Robot Kinematics*.
- von Stryk, O. (1993). Numerical solution of optimal control problems by direct collocation. *International Series of Numerical Mathematics*, Bd. 111, Nr. 4: S. 1–13. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.53.9817&rep=rep1&type=pdf>.
- von Stryk, O. (1994). *Numerische Lösung optimaler Steuerungsprobleme: Diskretisierung, Parameteroptimierung und Berechnung der adjungierten Variablen*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8: Meß-, Steuer- und Regelungstechnik, Nr. 441. VDI Verlag, Düsseldorf.

- von Stryk, O. und Schlemmer, M. (1994). Optimal control of the industrial robot manutec r3. In Bulirsch, R. und Kraft, D. (Hrsg.), *Computational optimal control*, S. 367–382. Birkhauser Verlag, Basel, Switzerland. <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=184492.184562>.
- Wang, L. C. T. und Chen, C. C. (1991). A combined optimization method for solving the inverse kinematics problems of mechanical manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Bd. 7, Nr. 4: S. 489–499. [http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs\\_all.jsp?arnumber=86079](http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=86079).
- Welman, C. (1993). Inverse kinematics and geometric constraints for articulated figure manipulation. Master’s thesis, School of Computing Science, Simon Fraser University, Burnaby, British Columbia, Canada.
- Williams, R. L., Albus, J. S. und Bostelman, R. V. (2004). 3d cable-based cartesian metrology system. *Journal of Robotic Systems*, Bd. 21, Nr. 5: S. 237–257.
- Wolfe, P. (1959). The simplex method for quadratic programming. *Econometrica*, Bd. 27, Nr. 3: S. 382–398. <http://www.jstor.org/stable/1909468>.
- Wong, E. (2011). *Active-Set Methods for Quadratic Programming*. Dissertation, Department of Mathematics, University of California, San Diego.

## A Der Mercatronics-Manipulator

Bei der Entwicklung von Assistenzsystemen für Autobetonpumpen wurde nach der Richtlinie VDI 2206 „Entwicklungsmethodik für mechatronische Systeme“ (Verein Deutscher Ingenieure (VDI) 2004) verfahren (Abb. A.1).

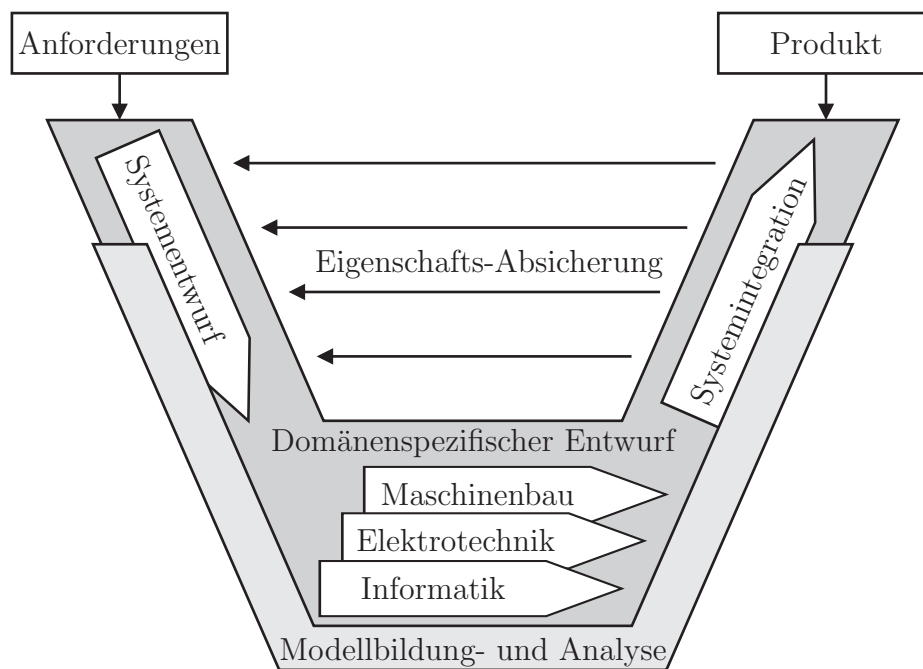


Abbildung A.1: Die Richtlinie VDI 2206: „Entwicklungsmethodik für mechatronische Systeme“, Verein Deutscher Ingenieure (VDI) (2004).

In Kooperation mit der MERCATRONICS GmbH, einem Startup des Lehrstuhls für Mechatronik, wurde ein elektrisch angetriebener, kinematisch redundanter Manipulator mit sechs Freiheitsgraden entworfen. Der skalierte Versuchsträger ist dabei dem Aufbau einer typischen Autobetonpumpe nachempfunden. Unter Einsatz eines echtzeitfähigen Betriebssystems können auf dem Demonstrator gezielt komplexe Algorithmen zur Auflösung der kinematischen Redundanz entwickelt werden, wobei das Hauptaugenmerk auf dem Entwurf von Mensch-zentrierten Bedienkonzepten liegt. Unter Einsatz des herunter skalierten Demonstrators kann somit während der frühen Phase des Entwurfs auf kostenintensive Prototypen verzichtet und ein gefahrloser Entwicklungsprozess gewährleistet werden (Schramm u. a. 2010b; Hiller u. a. 2009).

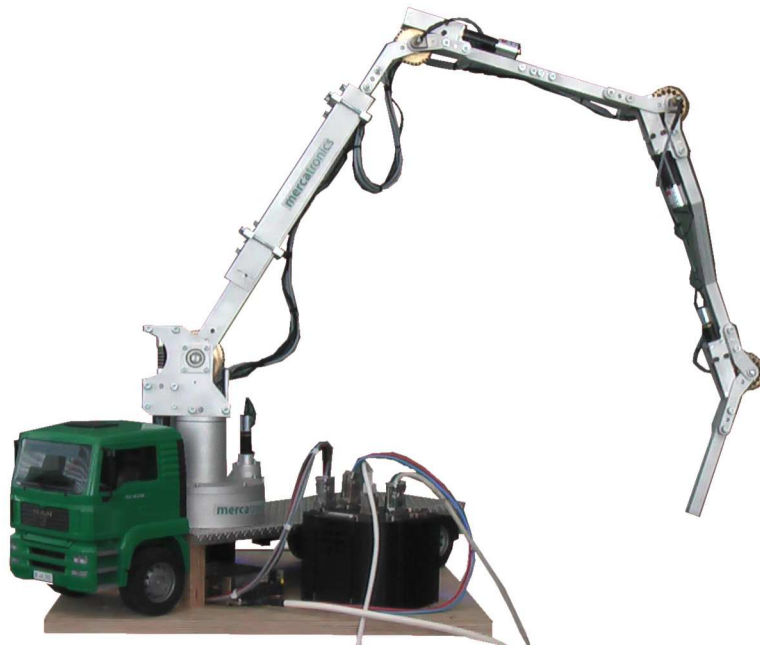


Abbildung A.2: Der MERCATRONICS-Manipulator.

## B Obere Abschätzung für die Anzahl der Ecken eines Polytops

Ein konvexes Polytop der Dimension  $n$ , auch  $n$ -Polytop genannt, ist eine Verallgemeinerung der zweidimensionalen konvexen Polygone bzw. der dreidimensionalen konvexen Polyeder. Konvexe Polytope lassen sich durch die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems bilden. Mit Hilfe des Theorems von McMULLEN (McMullen 1970) lässt sich die obere Grenze für die Anzahl der Ecken eines  $n$ -Polytops bestimmen.

Sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $m \geq n$  und  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Dann hat das konvexe Polytop  $\mathcal{P}_n$  des  $\mathbb{R}^n$ , das durch

$$\mathcal{P}_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \quad (\text{B.1})$$

definiert ist, gemäß dem *Upper-Bound*-Theorem von McMULLEN (McMullen 1970) höchstens

$$f(n, m) = \binom{m - \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}{m - n} + \binom{m - \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}{m - n} \quad (\text{B.2})$$

Ecken (siehe Avis und Devroye 2000; McMullen und Shephard 1971). Dabei wird der Ausdruck innerhalb von  $\lfloor \dots \rfloor$  abgerundet.

Der Fall, dass die Lösungsmenge darüber hinaus aus Gleichungs-Nebenbedingungen besteht, soll im Folgenden erläutert werden.

Sei nun das Polytop  $\mathcal{Q}_n$  sowohl durch das Ungleichungssystem

$$\mathbf{P} \mathbf{x} \leq \mathbf{c} \quad (\text{B.3})$$

als auch durch das unterbestimmte Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{B.4})$$

definiert, so dass

$$\mathcal{Q}_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{P} \mathbf{x} \leq \mathbf{c}\} \quad (\text{B.5})$$

gelte und

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\in \mathbb{R}^{m \times n}, \\ \mathbf{b} &\in \mathbb{R}^m, \\ \mathbf{P} &\in \mathbb{R}^{l \times n}, \\ \mathbf{c} &\in \mathbb{R}^l, \end{aligned}$$

mit  $m \leq n$  und  $n - m \leq l$ .

Unter der Annahme, dass  $\mathbf{A}$  vollen Rang hat, d. h.  $\text{rang } \mathbf{A} = m$ , kann durch einfache Eliminationsverfahren  $\mathcal{Q}_n$  in ein äquivalentes Polytop  $\mathcal{R}_{n-m}$  reduziert werden. Zu diesem Zweck werden zwei Matrizen  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$  so gewählt, dass jede Lösung von Gl. (B.4) durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{Y} \mathbf{x}_y + \mathbf{Z} \mathbf{x}_z \quad (\text{B.6})$$

dargestellt werden kann, wobei  $\mathbf{x}_y \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{x}_z \in \mathbb{R}^r$  und  $r = n - m$  der Dimension des Lösungsraums von Gl. (B.4) entspricht. Außerdem werde vorausgesetzt, dass

$$(\mathbf{A} \mathbf{Y})^{-1} \text{ existiert und } \mathbf{A} \mathbf{Z} = \mathbf{0}. \quad (\text{B.7})$$

Es kann gezeigt werden, dass die Matrizen  $\mathbf{Y}$  und  $\mathbf{Z}$  beispielsweise mittels  $\mathbf{QR}$ -Zerlegung bestimmt werden können (Nocedal und Wright 1999). Dabei ist  $\mathbf{Z}$  die so genannte Nullraummatrix bzw. der Kern von  $\mathbf{A}$  (vgl. Bruckmann 2010).

Einsetzen von Gl. (B.6) in Gl. (B.4) liefert zunächst

$$\mathbf{x}_y = (\mathbf{A} \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{b} \quad (\text{B.8})$$

und damit

$$\mathbf{x} = \mathbf{Y} (\mathbf{A} \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{Z} \mathbf{x}_z. \quad (\text{B.9})$$

Daraus folgt, dass jeder Vektor  $\mathbf{x}$  aus Gl. (B.9) die Gleichungsbedingungen (B.4) für jedes beliebige  $\mathbf{x}_z \in \mathbb{R}^r$  erfüllt. Wird nun Gl. (B.9) ins Ungleichungssystem (B.3) eingesetzt, ergibt sich dadurch ein reduziertes Ungleichungssystem in  $\mathbf{x}_z$  mit

$$\mathbf{P} \mathbf{Z} \mathbf{x}_z \leq \mathbf{c} - \mathbf{P} \mathbf{Y} (\mathbf{A} \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{b}, \quad (\text{B.10})$$

welches implizit Gl. (B.4) erfüllt.

Das  $n$ -Polytop  $\mathcal{Q}_n$  aus Gl. (B.5) ist damit äquivalent zum  $r$ -Polytop

$$\mathcal{R}_r = \{\mathbf{x}_z \in \mathbb{R}^r \mid \mathbf{F} \mathbf{x}_z \leq \mathbf{e}\}, \quad (\text{B.11})$$

wobei

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{l \times r}, \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{c} - \mathbf{P} \mathbf{Y} (\mathbf{A} \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{b} \in \mathbb{R}^l. \quad (\text{B.13})$$



Die Anwendung des Theorems von McMULLEN (McMullen 1970), Gl. (B.2), auf das Polytop  $\mathcal{R}_r$  bzw. auf das Polytop  $\mathcal{Q}_n$  liefert schließlich eine obere Abschätzung für die Anzahl der Ecken

$$f(l, r) = \binom{r - \lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor}{l-r} + \binom{r - \lfloor \frac{l+2}{2} \rfloor}{l-r}. \quad (\text{B.14})$$

In Tab. B.1 sind Beispiele von redundanten Systemen aufgelistet, in dem die maximale Anzahl an Ecken gegenübergestellt werden.

Tabelle B.1: Theorem von McMULLEN (McMullen 1970) angewendet auf verschiedene redundante Systeme

Gelenk- FG $n$	TCP- FG $m$	Redun- danz $r$	Unglei- chungen $l$	max. Anzahl Ecken Gl. (B.14)	Beispiele für redundante Systeme
7	6	1	14	2	SEGESTA (Fang 2005)
8	6	2	16	16	ARTIST (Bruckmann 2010)
9	6	3	18	32	(Borgstrom u. a. 2009)
4	2	2	8	8	4-armige ABP
4	3	1	8	2	4-armige ABP
5	2	3	10	16	5-armige ABP
5	3	2	10	10	5-armige ABP

## C Einfache, minimale Zeittrajektorie

Im Folgenden werden die Eckdaten der Zeitpunkte  $t_0, \dots, t_7$  der minimalen Zeittrajektorie für alle vier vorkommenden Fälle aufgelistet (siehe Abb. 5.24 und Abschnitt 5.5.1). Vorgaben sind sowohl der Startzeitpunkt der Trajektorie  $t_0$  als auch die in Bahnkoordinaten gegebene Start- und Endposition  $s_{P,\min}$  und  $s_{P,\max}$  und die maximale Geschwindigkeit  $v_{P,\max}$ , Beschleunigung  $a_{P,\max}$  und der maximale Ruck  $r_{P,\max}$  der Plattform.

Fall 1:

Zeitpunkt  $t_0$ :

$$\begin{aligned} r(t_0) &= r_{P,\max}, \\ a(t_0) &= 0, \\ v(t_0) &= 0, \\ s(t_0) &= s_{P,\min}, \end{aligned} \tag{C.1}$$

Zeitpunkt  $t_1 = t_0 + \frac{a_{P,\max}}{r_{P,\max}}$ :

$$\begin{aligned} r(t_1) &= 0, \\ a(t_1) &= a_{P,\max}, \\ v(t_1) &= \frac{1}{2} \frac{a_{P,\max}^2}{r_{P,\max}}, \\ s(t_1) &= \frac{1}{6} \frac{a_{P,\max}^3}{r_{P,\max}^2} + s_{P,\min}, \end{aligned} \tag{C.2}$$

Zeitpunkt  $t_2 = t_0 + \frac{v_{P,\max}}{a_{P,\max}}$ :

$$\begin{aligned} r(t_2) &= -r_{P,\max}, \\ a(t_2) &= a_{P,\max}, \\ v(t_2) &= v_{P,\max} - \frac{1}{2} \frac{a_{P,\max}^2}{r_{P,\max}}, \\ s(t_2) &= \frac{1}{2} \frac{v_{P,\max}^2}{a_{P,\max}} - \frac{1}{2} \frac{a_{P,\max} a_{P,\max}}{r_{P,\max}} + \frac{1}{6} \frac{a_{P,\max}^3}{r_{P,\max}^2} + s_{P,\min}, \end{aligned} \tag{C.3}$$

Zeitpunkt  $t_3 = t_0 + \frac{a_{P,\max}}{r_{P,\max}} + \frac{v_{P,\max}}{a_{P,\max}}$ :

$$\begin{aligned} r(t_3) &= 0, \\ a(t_3) &= 0, \\ v(t_3) &= v_{P,\max}, \\ s(t_3) &= \frac{1}{2} \frac{a_{P,\max} v_{P,\max}}{r_{P,\max}} + \frac{1}{2} \frac{v_{P,\max}^2}{a_{P,\max}} + s_{P,\min}, \end{aligned} \tag{C.4}$$

Zeitpunkt  $t_4 = t_0 + \frac{s_{P,\max} - s_{P,\min}}{v_{P,\max}}$ :

$$\begin{aligned} r(t_4) &= -r_{P,\max}, \\ a(t_4) &= 0, \\ v(t_4) &= v_{P,\max}, \\ s(t_4) &= -\frac{1}{2} \frac{a_{P,\max} v_{P,\max}}{r_{P,\max}} - \frac{1}{2} \frac{v_{P,\max}^2}{a_{P,\max}} + s_{P,\max}, \end{aligned} \tag{C.5}$$

Zeitpunkt  $t_5 = t_0 + \frac{a_{P,\max}}{r_{P,\max}} + \frac{s_{P,\max} - s_{P,\min}}{v_{P,\max}}$ :

$$\begin{aligned} r(t_5) &= 0, \\ a(t_5) &= -a_{P,\max}, \\ v(t_5) &= -\frac{1}{2} \frac{a_{P,\max}^2}{r_{P,\max}} + v_{P,\max}, \\ s(t_5) &= \frac{1}{2} \frac{a_{P,\max} v_{P,\max}}{r_{P,\max}} - \frac{1}{6} \frac{a_{P,\max}^3}{r_{P,\max}^2} - \frac{1}{2} \frac{v_{P,\max}^2}{a_{P,\max}} + s_{P,\max}, \end{aligned} \tag{C.6}$$

Zeitpunkt  $t_6 = t_0 + \frac{v_{P,\max}}{a_{P,\max}} + \frac{s_{P,\max} - s_{P,\min}}{v_{P,\max}}$ :

$$\begin{aligned} r(t_6) &= r_{P,\max}, \\ a(t_6) &= -a_{P,\max}, \\ v(t_6) &= \frac{1}{2} \frac{a_{P,\max}^2}{r_{P,\max}}, \\ s(t_6) &= -\frac{1}{6} \frac{a_{P,\max}^3}{r_{P,\max}^2} + s_{P,\max}, \end{aligned} \tag{C.7}$$

Zeitpunkt  $t_7 = t_0 + \frac{a_{P,\max}}{r_{P,\max}} + \frac{v_{P,\max}}{a_{P,\max}} + \frac{s_{P,\max} - s_{P,\min}}{v_{P,\max}}$ :

$$\begin{aligned} r(t_7) &= 0, \\ a(t_7) &= 0, \\ v(t_7) &= 0, \\ s(t_7) &= s_{P,\max}, \end{aligned} \tag{C.8}$$

Fall 2:

Zeitpunkt  $t_0$ :

$$\begin{aligned} r(t_0) &= r_{P,\max}, \\ a(t_0) &= 0, \\ v(t_0) &= 0, \\ s(t_0) &= s_{P,\min}, \end{aligned} \tag{C.9}$$

Zeitpunkt  $t_1 = t_0 + \frac{a_{P,\max}}{r_{P,\max}}$ :

$$\begin{aligned} r(t_1) &= 0, \\ a(t_1) &= a_{P,\max}, \\ v(t_1) &= \frac{1}{2} \frac{a_{P,\max}^2}{r_{P,\max}}, \\ s(t_1) &= \frac{1}{6} \frac{a_{P,\max}^3}{r_{P,\max}^2} + s_{P,\min}, \end{aligned} \tag{C.10}$$

Zeitpunkt  $t_3 = t_2 = t_0 - \frac{1}{2} \frac{a_{P,\max}}{r_{P,\max}} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a_{P,\max}^4 + 4 a_{P,\max} r_{P,\max}^2 (s_{P,\max} - s_{P,\min})}}{a_{P,\max} r_{P,\max}}$ :

$$\begin{aligned} r(t_3) &= r(t_2) = -r_{P,\max}, \\ a(t_3) &= a(t_2) = a_{P,\max}, \\ v(t_3) &= v(t_2) = -\frac{a_{P,\max}^2}{r_{P,\max}} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a_{P,\max}^4 + 4 a_{P,\max} r_{P,\max}^2 (s_{P,\max} - s_{P,\min})}}{r_{P,\max}}, \\ s(t_3) &= s(t_2) = \frac{2}{3} \frac{a_{P,\max}^3}{r_{P,\max}^2} - \frac{1}{2} \frac{a_{P,\max} \sqrt{a_{P,\max}^4 + 4 a_{P,\max} r_{P,\max}^2 (s_{P,\max} - s_{P,\min})}}{r_{P,\max}^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} (s_{P,\min} + s_{P,\max}), \end{aligned} \tag{C.11}$$

Zeitpunkt  $t_5 = t_4 = t_0 + \frac{s_{P,\max} - s_{P,\min}}{v_{P,\max}}$ :

$$\begin{aligned} r(t_5) &= r(t_4) = 0, \\ a(t_5) &= a(t_4) = -a_{P,\max}, \\ v(t_5) &= v(t_4) = v(t_3), \\ s(t_5) &= s(t_4) = -\frac{2}{3} \frac{a_{P,\max}^3}{r_{P,\max}^2} + \frac{1}{2} \frac{a_{P,\max} \sqrt{a_{P,\max}^4 + 4 a_{P,\max} r_{P,\max}^2 (s_{P,\max} - s_{P,\min})}}{r_{P,\max}^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} (s_{P,\max} - s_{P,\min}), \end{aligned} \tag{C.12}$$

Zeitpunkt  $t_6 = t_0 + \frac{v_{P,\max}}{a_{P,\max}} + \frac{s_{P,\max} - s_{P,\min}}{v_{P,\max}}$ :

$$\begin{aligned} r(t_6) &= r_{P,\max}, \\ a(t_6) &= a(t_5), \\ v(t_6) &= \frac{1}{2} \frac{a_{P,\max}^2}{r_{P,\max}}, \\ s(t_6) &= -\frac{1}{6} \frac{a_{P,\max}^3}{r_{P,\max}^2} + s_{P,\max}, \end{aligned} \tag{C.13}$$

Zeitpunkt  $t_7 = t_0 + \frac{a_{P,\max}}{r_{P,\max}} + \frac{v_{P,\max}}{a_{P,\max}} + \frac{s_{P,\max} - s_{P,\min}}{v_{P,\max}}$ :

$$\begin{aligned} r(t_7) &= 0, \\ a(t_7) &= 0, \\ v(t_7) &= 0, \\ s(t_7) &= s_{P,\max}, \end{aligned} \tag{C.14}$$

Fall 3:

Zeitpunkt  $t_0$ :

$$\begin{aligned} r(t_0) &= r_{P,\max}, \\ a(t_0) &= 0, \\ v(t_0) &= 0, \\ s(t_0) &= s_{P,\min}, \end{aligned} \tag{C.15}$$

Zeitpunkt  $t_2 = t_1 = t_0 + \frac{\sqrt{v_{P,\max} r_{P,\max}}}{r_{P,\max}}$ :

$$\begin{aligned} r(t_2) &= r(t_1) &&= -r_{P,\max}, \\ a(t_2) &= a(t_1) &&= \sqrt{v_{P,\max} r_{P,\max}}, \\ v(t_2) &= v(t_1) &&= \frac{1}{2} v_{P,\max}, \\ s(t_2) &= s(t_1) &&= \frac{1}{6} \frac{\sqrt{v_{P,\max} r_{P,\max}} v_{P,\max}}{r_{P,\max}} + s_{P,\min}, \end{aligned} \tag{C.16}$$

Zeitpunkt  $t_3 = t_0 + \frac{2\sqrt{v_{P,\max} r_{P,\max}}}{r_{P,\max}}$ :

$$\begin{aligned} r(t_3) &= 0, \\ a(t_3) &= 0, \\ v(t_3) &= v_{P,\max}, \\ s(t_3) &= \frac{\sqrt{v_{P,\max} r_{P,\max}} v_{P,\max}}{r_{P,\max}} + s_{P,\min}, \end{aligned} \tag{C.17}$$

Zeitpunkt  $t_4 = t_0 - \frac{8\sqrt[3]{(v_{P,\max} r_{P,\max})^2}}{r_{P,\max}} + \frac{8\sqrt{v_{P,\max} r_{P,\max}}}{r_{P,\max}} + \frac{s_{P,\max} - s_{P,\min}}{v_{P,\max}}$ :

$$\begin{aligned} r(t_4) &= -r_{P,\max}, \\ a(t_4) &= 0, \\ v(t_4) &= v_{P,\max}, \\ s(t_4) &= -8 \frac{\sqrt[3]{(v_{P,\max} r_{P,\max})^3}}{r_{P,\max}^2} + 7 \frac{\sqrt{v_{P,\max} r_{P,\max}} v_{P,\max}}{r_{P,\max}^2} + s_{P,\max}, \end{aligned} \tag{C.18}$$

Zeitpunkt  $t_6 = t_5 = t_0 - \frac{8\sqrt[3]{(v_{P,\max} r_{P,\max})^2}}{r_{P,\max}} + \frac{9\sqrt{v_{P,\max} r_{P,\max}}}{r_{P,\max}} + \frac{s_{P,\max} - s_{P,\min}}{v_{P,\max}}$ :

$$\begin{aligned} r(t_6) &= r(t_5) &&= 0, \\ a(t_6) &= a(t_5) &&= -\sqrt{v_{P,\max} r_{P,\max}}, \\ v(t_6) &= v(t_5) &&=, \\ s(t_6) &= s(t_5) &&= -\frac{32}{3} \frac{\sqrt[3]{(v_{P,\max} r_{P,\max})^3}}{r_{P,\max}^2} + \frac{21}{2} \frac{\sqrt{v_{P,\max} r_{P,\max}} v_{P,\max}}{r_{P,\max}^2} + s_{P,\max}, \end{aligned} \tag{C.19}$$

$$\begin{aligned}
\text{Zeitpunkt } t_7 &= t_0 - \frac{8 \sqrt[3]{(v_{P,\max} r_{P,\max})^2}}{r_{P,\max}} + \frac{10 \sqrt{v_{P,\max} r_{P,\max}}}{r_{P,\max}} + \frac{s_{P,\max} - s_{P,\min}}{v_{P,\max}}: \\
r(t_7) &= 0, \\
a(t_7) &= 0, \\
v(t_7) &= 0, \\
s(t_7) &= -\frac{8}{3} \frac{\sqrt{(v_{P,\max} r_{P,\max})^3}}{r_{P,\max}^2} + \frac{8}{3} \frac{\sqrt{v_{P,\max} r_{P,\max}} v_{P,\max}}{r_{P,\max}^2} + s_{P,\max},
\end{aligned} \tag{C.20}$$

Fall 4:

Zeitpunkt  $t_0$ :

$$\begin{aligned}
r(t_0) &= r_{P,\max}, \\
a(t_0) &= 0, \\
v(t_0) &= 0, \\
s(t_0) &= s_{P,\min},
\end{aligned} \tag{C.21}$$

$$\begin{aligned}
\text{Zeitpunkt } t_3 &= t_2 = t_1 = t_0 + \frac{1}{2} \frac{\sqrt[3]{4 r_{P,\max}^2 (s_{P,\max} - s_{P,\min})}}{r_{P,\max}}: \\
r(t_3) &= r(t_2) = r(t_1) = -r_{P,\max}, \\
a(t_3) &= a(t_2) = a(t_1) = \frac{1}{2} \sqrt[3]{4 r_{P,\max}^2 (s_{P,\max} - s_{P,\min})}, \\
v(t_3) &= v(t_2) = v(t_1) = \frac{1}{8} \frac{\sqrt[3]{(4 r_{P,\max}^2 (s_{P,\max} - s_{P,\min}))^2}}{r_{P,\max}}, \\
s(t_3) &= s(t_2) = s(t_1) = \frac{1}{12} (s_{P,\max} + 11 s_{P,\min}),
\end{aligned} \tag{C.22}$$

$$\begin{aligned}
\text{Zeitpunkt } t_6 &= t_5 = t_4 = t_0 + \frac{3}{2} \frac{\sqrt[3]{4 r_{P,\max}^2 (s_{P,\max} - s_{P,\min})}}{r_{P,\max}}: \\
r(t_6) &= r(t_5) = r(t_4) = r_{P,\max}, \\
a(t_6) &= a(t_5) = a(t_4) = -\frac{1}{2} \sqrt[3]{4 r_{P,\max}^2 (s_{P,\max} - s_{P,\min})}, \\
v(t_6) &= v(t_5) = v(t_4) =, \\
s(t_6) &= s(t_5) = s(t_4) = \frac{1}{12} (11 s_{P,\max} + s_{P,\min}),
\end{aligned} \tag{C.23}$$

$$\begin{aligned}
\text{Zeitpunkt } t_7 &= t_0 + \frac{2 \sqrt[3]{4 r_{P,\max}^2 (s_{P,\max} - s_{P,\min})}}{r_{P,\max}}: \\
r(t_7) &= 0, \\
a(t_7) &= 0, \\
v(t_7) &= 0, \\
s(t_7) &= s_{P,\max},
\end{aligned} \tag{C.24}$$